Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

II Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica $\mathcal{E}$. Sia dato l'endomorfismo L_A determinato dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che lo spettro dell'endomorfismo L_A e' contenuto in $\mathbb{R}$ e, per ogni autovalore di L_A, determinare equazioni cartesiane e basi dei rispettivi autospazi.

(ii) Dedurre la decomposizione primaria di $\mathbb{R}^3$ in fattori primari rispetto all'endomorfismo L_A, dedurre il polinomio minimo di L_A e la forma canonica J di Jordan di L_A, indicando inoltre una base esplicita di Jordan $\mathcal{J}$ per $\mathbb{R}^3$, in cui la matrice A assume la forma canonica di Jordan J determinata.

(iii) Stabilire se puo' esistere un isomorfismo tra lo spazio vettoriale quoziente $\frac{\mathbb{R}^3}{\mathrm{Im}(L_A)}$ e lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]_{\leq 1}$ dei polinomi in un'indeterminata x, a coefficienti reali e di grado al piu' uno.

Esercizio 2. Si consideri il piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P} := \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, munito di riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\, \mathbf{e}_1\, \mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}$. Siano dati i quattro punti

$$P_0 = [1, 0, 0],\ P_1 = [-1, 1, 0],\ P_2 = [2, -1, 1],\ P_3 = [0, 0, 1].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono in posizione generale in $\mathbb{P}$ e determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane della retta proiettiva $r := \mathcal{L}(P_1, P_2) \subset \mathbb{P}$ congiungente i punti P_1 e P_2.

(ii) Sia $\mathbb{P}^*$ il piano proiettivo duale di $\mathbb{P}$, munito di riferimento duale a quello canonico per $\mathbb{P}$, che fornisce quindi coordinate omogenee duali $[a_0, a_1, a_2]$ su $\mathbb{P}^*$ e si consideri l'applicazione di dualita'

$$\delta : \mathbb{P}^* \to \{\text{Rette di } \mathbb{P}\}.$$

Considerato $\Lambda_1(P_1)$ il fascio di rette proiettive in $\mathbb{P}$ di centro il punto P_1, determinare equazioni cartesiane nelle coordinate $[a_0, a_1, a_2]$ del sottospazio proiettivo $\delta^{-1}(\Lambda_1(P_1)) \subset \mathbb{P}^*$, verificando che il sottospazio proiettivo $\delta^{-1}(r) \subset \mathbb{P}^*$ e' contenuto in $\delta^{-1}(\Lambda_1(P_1))$.

(iii) Determinare le equazioni omogenee di tutte le proiettivita' di $\mathbb{P}$ che trasformano ordinatamente la quaterna ordinata P_0, P_1, P_2, P_3 nella quaterna fondamentale ordinata F_0, F_1, F_2, U, dove F_i punto fondamentale, $0 \le i \le 2$, ed U punto unità nel riferimento proiettivo canonico.

Esercizio 3. Si consideri $\mathbb{P} := \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la retta proiettiva numerica reale, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\, \mathbf{e}_1$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ su $\mathbb{P}$. Siano assegnati i seguenti tre punti:

$$A = [2,3],\ B = [2,1],\ C = [1,-1],$$

espressi nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1]$ nel riferimento canonico.

(i) Stabilire se i tre punti A, B, C determinano un nuovo riferimento proiettivo per $\mathbb{P}$.

(ii) Determinare le equazioni omogenee

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \alpha\, M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}, \quad \alpha \in \mathbb{R}^*$$

del cambiamento di coordinate omogenee da $[x_0, x_1]$ a $[y_0, y_1]$ rispetto al riferimento proiettivo di $\mathbb{P}$ che ha A come primo punto fondamentale del riferimento, B come secondo punto fondamentale del riferimento e C come punto unità del riferimento (i.e. il riferimento con coordinate $[y_0, y_1]$ in cui A, B e C hanno coordinate omogenee $[1,0]$, $[0,1]$ e $[1,1]$ rispettivamente).

(iii) Si interpretino le equazioni omogenee trovate in (ii) come equazioni della proiettivita' $f \in \mathrm{PGL}(\mathbb{P}) = PGL(3, \mathbb{R})$ tale che

$$f(A) = F_0 = [1,0],\ f(B) = F_1 = [0,1],\ f(C) = U = [1,1].$$

Determinare le coordinate $[x_0, x_1]$ del punto $D \in \mathbb{P}$ di modo tale che la quaterna ordinata A, B, C, D sia proiettivamente equivalente, mediante la proiettivita' f, alla quaterna ordinata

$$f(A) = F_0 = [1,0], f(B) = F_1 = [0,1], f(C) = U = [1,1], f(D) = [1,2]$$

nelle coordinate $[y_0, y_1]$. Dedurre inoltre il valore del birapporto $\beta(A, B, C, D)$ della quaterna ordinata A, B, C, D.

Esercizio 1

(i) L'endomorfismo L_A con $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\-2&-1&1\\-2&-1&1\end{pmatrix}$ ha polinomio

Caratteristico

$$P_A(x)=\det\begin{pmatrix}-x&0&0\\-2&-(1+x)&1\\-2&-1&1-x\end{pmatrix}\overset{\text{Laplace rispetto I Riga}}{=}-x\cdot\det\begin{pmatrix}-(1+x)&1\\-1&1-x\end{pmatrix}$$

$$=-x\left[-(1-x^2)+1\right]=-x\left[-\cancel{1}+x^2+\cancel{1}\right]=$$

$$=-x^3$$

Pertanto L_A ha un unico autovalore che è $\lambda=0$

$$V_0(L_A)=\mathrm{Ker}(L_A)=\left\{\underline{x}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; 2x_1+x_2-x_3=0\right\}=$$

$$\left\langle \underline{v}_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix},\ \underline{v}_2=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\rangle$$ è l'autospazio relativo a $\lambda=0$.

(ii) Visto che $m_g(0)=2 \Rightarrow$ la forma canonica J di Jordan deve avere 2 blocchi di Jordan. Necessariamente uno di ordine 1 e l'altro di ordine 2 cioè è:

$$J:=\begin{pmatrix}\boxed{0}&0&0\\0&\boxed{\begin{matrix}0&1\\0&0\end{matrix}}\end{pmatrix}$$

Il polinomio minimo è necessariamente $m_A(x)=x^2$, (infatti $A^2=0$ manifestamente). Infine tutto $\mathbb{R}^3$ è un fattore primario ed una base di Jordan si ottiene aggiungendo un qualunque vettore di $\mathbb{R}^3$ che non appartenga a $V_0(L_A)$, ad esempio $\underline{e}_1$, quindi:

$$\mathcal{J}=\{\underline{v}_1,\underline{v}_2,\underline{e}_1\}$$

(iii) Poiché $\mathrm{Im}(L_A) = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ ha dimensione 1 (infatti $rg(A) = 1$), si ha che

$$\mathbb{R}^3 / \mathrm{Im}(L_A) \quad \text{ha dimensione due.}$$

Visto che $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ è invertibile $\Rightarrow$

$\{[\underline{e}_1], [\underline{e}_2]\}$ costituisce una base per $\mathbb{R}^3 / \mathrm{Im}(L_A)$

Ad esempio un isomorfismo possibile con $\mathbb{R}[X]_{\leq 1}$ è:

$$\mathbb{R}^3 / \mathrm{Im}(L_A) \xrightarrow{\varphi} \mathbb{R}[X]_{\leq 1}$$

$$[\underline{e}_1] \longrightarrow 1$$

$$[\underline{e}_2] \longrightarrow x$$

$$a[\underline{e}_1] + b[\underline{e}_2] \longrightarrow a + bx \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Esercizio 2

(i) In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i punti

$$P_0 = [1,0,0] \qquad P_1 = [-1,1,0] \qquad P_2 = [2,-1,1],\ P_3 = [0,0,1]$$

sono in posizione generale visto che ogni sottomatrice 3×3 della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M(3 \times 4; \mathbb{R})$$

ha determinante diverso da zero.

Inoltre il sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(P_1, P_2)$ è una retta proiettiva r di equazioni parametriche:

$$\boxed{r: \begin{cases} x_0 = -\lambda + 2\mu \\ x_1 = \lambda - \mu \\ x_2 = \mu \end{cases}}$$

ed equazione cartesiana

$$r: \det\begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \iff x_0 + x_2 - (2x_2 - x_1) = 0$$

$$\iff \boxed{x_0 + x_1 - x_2 = 0} : r$$

(ii) Il sottospazio proiettivo in $(\mathbb{P}^2)^*$ che corrisponde al fascio di rette $\Lambda_1(P_1)$ è la retta proiettiva $r^\vee = \delta^{-1}(\Lambda_1(P_1)) \subset (\mathbb{P}^2)^*$ di eq. cartesiana:

$$\boxed{r^\vee = \mathbb{P}\left(\mathrm{Ann}\left(\left\langle \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} \right\rangle\right)\right) : a_0 - a_1 = 0}$$

nelle coordinate duali $[a_0, a_1, a_2]$ di $(\mathbb{P}^2)^*$.

Visto che $r = \mathcal{L}(P_1, P_2) \subset \mathbb{P}^2$ corrisponde al punto $P^\vee = [1, 1, -1]$ in $(\mathbb{P}^2)^*$, notiamo che

$$P^\vee = \delta^{-1}(r) \in \delta^{-1}(\Lambda_1(P_1)) = r^\vee.$$

(iii) Se poniamo $P_i = [v_i]$ notiamo che

$$\boxed{v_3 = -v_0 + v_1 + v_2 \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}}$$

Pertanto, nella base $\mathcal{F} := \{ -\underline{v}_0 , \underline{v}_1 , \underline{v}_2 \}$ $\Rightarrow$

$$\underline{v}_3 := 1(-\underline{v}_0) + 1(\underline{v}_1) + 1(\underline{v}_2).$$

In altre termini nel riferimento proiettivo di $\mathbb{P}^2$ dato da

$$(-\underline{v}_0)\cdot(\underline{v}_1)(\underline{v}_2)$$

$\Rightarrow$ P_i sono punti fondamentali, $0 \le i \le 2$,

P_3 è il punto unità del riferimento

Ora presa $\mathcal{E} = \{ \underline{e}_0 , \underline{e}_1 , \underline{e}_2 \}$ base di $\mathbb{R}^3$ $\Rightarrow$

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{F}} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C$$

ed in effetti $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ che assicura $U \longrightarrow P_3$.

Pertanto la classe della matrice C, i.e. $\{ \alpha C \}$ con $\alpha \in \mathbb{R}^*$, individua la proiettività $g \in Aut(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$ t.c.

$$g : \begin{aligned} F_0 &\longrightarrow P_0 \\ F_1 &\longrightarrow P_1 \\ F_2 &\longrightarrow P_2 \\ F_3 &\longrightarrow P_3 \end{aligned}$$

Pertanto la proiettività richiesta è $f = g^{-1}$, quella associata della classe di proporzionalità della matrice

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} {}^t(Cof(C)) \underset{\text{proporzionale}}{\sim} {}^t(Cof(C))$$

Quindi $Cof(C) = \begin{pmatrix} +1 & 0 & 0 \\ +1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t(Cof(C)) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

sono le equazioni della proiettività f richiesta.

Esercizio 3

(i) Poiché $A=[2,3]$, $B=[2,+1]$ e $C=[1,-1]$ sono 3 punti distinti di $\mathbb{P}^1$ sono in posizione generale in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \Rightarrow$ formano un riferim

(ii) Per dedurre il cambiamento di coordinate omogenee che involve il riferimento su $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ che abbia

A come F_0, B come F_1 e C come U

si opera considerando la combinazione lineare

$$\lambda \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ +1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \lambda = \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & +1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & +1 \end{pmatrix}} = \frac{+1+2}{+2-6} = -\frac{3}{4}$$

$$\mu = \frac{\det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}}{-4} = \frac{-2-3}{-4} = \frac{5}{4}$$

Pertanto posto

$$\boxed{\underline{f}_0 := -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = -6\,\underline{e}_0 - 9\,\underline{e}_1 \quad e \quad \underline{f}_1 := 10\,\underline{e}_0 + 5\,\underline{e}_1}$$

nel riferimento $\underline{f}_0\, \underline{f}_1$ si ha che C è punto unità.

Infatti

$$F_0 = [\underline{f}_0] = [1,0], \quad F_1 = [\underline{f}_1] = [0,1]$$

mentre $\underline{f}_0 + \underline{f}_1 = -3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6+10 \\ -9+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix} = 4\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

effettivamente C corrisponde a

$U = [1,1]$ nel riferimento $\underline{f}_0\, \underline{f}_1$

Pertanto la proiettività che manda ordinatamente

$$F_0, F_1, U \xrightarrow{g} A, B, C, \quad g \in PGL(2,\mathbb{R})$$

è data dalla classe di proporzionalità di matrici

$$\{\alpha N\}_{\alpha \in \mathbb{R}^*}$$

dove N è la matrice (visto che $\lambda = -\frac{3}{4}$ e $\mu = \frac{5}{4}$, si può considerare a meno del fattore 4 a denominatore)

$$N = \begin{pmatrix} (-3)\cdot 2 & 5\cdot 2 \\ (-3)\cdot 3 & 5\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -9 & 5 \end{pmatrix}$$

cioè otteniamo il cambiamento di coordinate

$$g: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} \qquad \forall \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

infatti nelle coordinate del nuovo riferimento:

$[y_0, y_1]$

$$[1,0] = F_0 \longrightarrow \begin{pmatrix} -6\alpha \\ -9\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A = [2,3]$$

coord. $[x_0, x_1]$ nel vecchio riferimento

$$[0,1] = F_1 \longrightarrow \begin{pmatrix} 10\alpha \\ 5\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow B = [2,1]$$

$$[1,1] = U \longrightarrow \begin{pmatrix} 4\alpha \\ -4\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \longleftrightarrow C = [1,-1]$$

Pertanto, posta $M := N^{-1}$, il cambiamento di coordinate omogenee richiesto è:

$$\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \beta \cdot M \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} \sim \beta\, {}^t(\mathrm{Cof}(N)) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{Cof}(N) = \begin{pmatrix} 5 & +9 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t(\mathrm{Cof}(N)) = \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 9 & -6 \end{pmatrix}$$

cioè

$$\boxed{\begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 5 & -10 \\ 9 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}}$$

Verificando che è il cambiamento corretto:

$$A = [2,3] \xrightarrow{f} [(10-30)\beta, 0\beta] = [1,0]$$

$$B = [2,1] \xrightarrow{f} [(10-10)\beta, 12\beta] = [0,1]$$

$$C = [1,-1] \xrightarrow{f} [15\beta, 15\beta] = [1,1]$$

ok

(iii) Per definizione di birapporto, poiché

$$f(D) = [y_0, y_1] = [1,2] \Rightarrow$$

$$\beta(F_0, F_1, U, f(D)) = \frac{2}{1} = 2$$

$$\|$$

$$\beta(f(A), f(B), f(C), f(D))$$

Ma allora si ha anche

$$\beta(A,B,C,D) = 2$$

Se poniamo, nel riferimento $\underline{e}_0\, \underline{e}_1$ con coord. $[x_0, x_1]$, $D = [d_0, d_1]$, allora dai conti sulle coordinate (vedi <u>Esempio 27.2 su testo</u>)

$$\underset{\substack{\| \\ f(D)\text{ in }[y_0,y_1]}}{[1,2]} = \left[\det\begin{pmatrix} d_0 & 2 \\ d_1 & 1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & d_0 \\ 3 & d_1 \end{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

D in $[x_0,x_1]$

B in $[x_0,x_1]$ $=$ F_1 in $[y_0,y_1]$

A in $[x_0,x_1]$ $=$ F_0 in $[y_0,y_1]$

C in $[x_0,x_1]$ $=$ U in $[y_0,y_1]$

D in $[x_0,x_1]$

A in $[x_0,x_1]$ $=$ F_0 in $[y_0,y_1]$

C in $[x_0,x_1]$ $=$ U in $[y_0,y_1]$

B in $[x_0,x_1]$ $=$ F_1 in $[y_0,y_1]$

$$= \left[(d_0 - 2d_1)\cdot(-5),\ (2d_1 - 3d_0)\cdot 3\right] \Leftrightarrow$$

$$\begin{matrix} -5d_0 + 10d_1 = \alpha \\ -9d_0 + 6d_1 = 2\alpha \end{matrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}^* \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 5d_0 - 10d_1 + \alpha = 0 \\ 9d_0 - 6d_1 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 10d_0 - 20d_1 + 2\alpha = 0 \\ 9d_0 - 6d_1 + 2\alpha = 0 \end{cases}$$

$$\overline{\quad d_0 - 14d_1 = 0 \quad} \qquad \Rightarrow d_0 = 14d_1$$

$$\Rightarrow \boxed{D = [14, 1]}$$

Infatti dai conti precedenti $\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -6 & 10 \\ -9 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14\alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$ ok