Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME: ....

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME: ....

Esercizio 2. Si consideri $\mathbb{R}^3$ come spazio vettoriale euclideo, munito di prodotto scalare standard e base canonica $\mathcal{E}$ e siano (x, y, z) coordinate rispetto ad $\mathcal{E}$. Si consideri il sottospazio vettoriale U di equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} x - y &= 0 \\ y + 2z &= 0 \end{cases}$$

(i) Si determini una base ortonormale di U.

(ii) Estendere la base ortonormale di U ad una base ortonormale per $\mathbb{R}^3$, che sia concordemente orientata con la base $\mathcal{E}$.

(iii) Considerato ora $\mathbb{R}^3$ come spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, si considerino il piano affine

$$\pi : x + 2y - z - 2 = 0$$

e la retta affine

$$r : \begin{cases} x - y - 1 &= 0 \\ z &= 0 \end{cases}$$

Determinare equazioni cartesiane della retta s, ottenuta per proiezione ortogonale della retta r sul piano π.

Esercizio 3. Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = R(O; x, y, z)$ cartesiano ortonormale reale. Siano dati i vettori $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ che, rispetto al riferimento reale fissato, hanno coordinate

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix} \text{ e } \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix},$$

dove $i \in \mathbb{C}$ unita' immaginaria.

(i) Stabilire se $\underline{v}_1$ e $\underline{v}_2$ sono vettori $\mathbb{C}$–linearmente indipendenti.

(ii) Determinare equazioni cartesiane del sottospazio vettoriale $W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle$ scritte nelle coordinate (x, y, z), deducendo che W è un sottospazio vettoriale reale in $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.

(iii) Sia Π il piano affine avente giacitura determinata dal sottospazio W al punto (ii) e passante per il punto P che, rispetto al riferimento $\mathcal{R} = R(O; x, y, z)$, ha coordinate $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Determinare equazioni parametriche delle rette isotrope contenute in Π e passanti per il punto P.

Svolgimento I Esonero

Esercizio 1

$b(\underline{x},\underline{y}) = -x_1 y_1 + x_2 y_3 + x_3 y_2 + 2 x_3 y_3$

(i) $M_{\mathcal{E}}(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad rg(b) = 3 \Rightarrow$ b non degenere

$\Rightarrow V^{\perp_b} = \{\underline{0}\}$ cioè $\dim(V^{\perp_b}) = 0$

(ii) In base $\mathcal{E}' := \{ \underline{e}_1' = \underline{e}_1, \underline{e}_2' = \underline{e}_3, \underline{e}_3' = \underline{e}_2 \}$

$$M_{\mathcal{E}'}(b) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ per Lagrange $\quad \mathcal{E}'' = \{ \underline{e}_1'' = \underline{e}_1', \underline{e}_2'' = \underline{e}_2', \underline{e}_3'' = \underline{e}_3' - \frac{1}{2}\underline{e}_2' \}$

$$M := M_{\mathcal{E}',\mathcal{E}''} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A'' = M_{\mathcal{E}''}(b) = M^t \circ A' \circ M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad sgn(Q) = (1, 2)$

Pertanto b non è definita positiva $\Rightarrow$ non costituisce un prodotto scalare su V.

La dimensione massima di un sottospazio W su cui b si restringe a forma quadratica definita negativa è $\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2$

(iii) Nelle coordinate di Sylvester, poiché la forma diventa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

i due piani iperbolici sono $\quad W_2 : z_2 = 0$, $\quad W_3 : z_3 = 0$

Il cono isotropo in V è

$$z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0$$

Pertanto le direzioni isotrope in W_2 sono

$$\begin{cases} z_1^2 - z_2^2 - z_3^2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1^2 - z_3^2 = 0 \\ z_2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases}(z_1 - z_3)(z_1 + z_3) = 0 \\ z_2 = 0\end{cases}$$ cioè $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{s}_1 + \underline{s}_3$ (2)

$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \underline{s}_1 - \underline{s}_3$

$\mathcal{S} = \{\underline{s}_1, \underline{s}_2, \underline{s}_3\}$ base di Sylvester di $V \Rightarrow \langle \underline{v}_1 \rangle \cup \langle \underline{v}_2 \rangle$
Cono isotropo su W_2

Mentre in W_3

$$\begin{cases} z_1^2 - z_2^2 = 0 \\ z_3 = 0 \end{cases}$$ cioè $\underline{w}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \underline{s}_1 + \underline{s}_2$

$\underline{w}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} = \underline{s}_1 - \underline{s}_2$

$\langle \underline{w}_1 \rangle \cup \langle \underline{w}_2 \rangle$
Cono isotropo su W_3

<u>Esercizio 2</u>

(i) $U : \begin{cases} x - y = 0 \\ y + 2z = 0 \end{cases}$ $U = \langle \underline{u}_1 \rangle$ con $\underline{u}_1 = \begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow \underline{f}_1 = \begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -1/3\end{pmatrix}$ base ortonormale di U

(ii) $\dim(U^\perp) = 2 \Rightarrow \underline{u}_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \Rightarrow \underline{f}_2 = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\end{pmatrix}$

$$\underline{u}_3 := \underline{u}_1 \wedge \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} \underline{i} & \underline{j} & \underline{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\-1\\-4\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{f}_3 = \begin{pmatrix}-1/\sqrt{18}\\ -1/\sqrt{18}\\ -4/\sqrt{18}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2/\sqrt{6}\\ -2/\sqrt{6}\\ -\frac{2\sqrt{2}}{3}\end{pmatrix}$$

$\mathcal{F} = \{\underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3\}$ base ortonormale cercata

(iii) $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ si ha $\pi : x + 2y - z - 2 = 0$

$$r : \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

<u>Fascio di piani di asse r</u>

$$\lambda(x - y - 1) + \mu z = 0$$

Nel fascio, l'unico piano ortogonale a π

si ottiene con

$$\langle \underline{n}_{\lambda,\mu}, \underline{n}_{\pi} \rangle = 0 = \lambda - 2\lambda - \mu$$

$\Leftrightarrow \quad -\lambda - \mu = 0 \Leftrightarrow \boxed{\mu = -\lambda}$

$\Rightarrow \quad \alpha : \quad x - y - z - 1 = 0$ è piano per r ortogonale a π

$$\Rightarrow \quad s := \alpha \cap \pi = \begin{cases} x + 2y - z - 2 = 0 \\ x - y - z - 1 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 3

(i) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 1+i \end{pmatrix}$ e $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -2i \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}$ sono $\mathbb{C}$ - lin. indip.

perché

$$rg \begin{pmatrix} 2i & -i & 1+i \\ -2i & i & 1+i \end{pmatrix} = 2 \quad \text{perché} \quad \det \begin{pmatrix} -i & 1+i \\ i & 1+i \end{pmatrix} =$$

$$= -i(1+i) - i(1+i) = -2i(1+i) \neq 0$$

(ii) $\underline{w}_1 = \underline{v}_1 - \underline{v}_2 \sim \begin{pmatrix} 2i \\ -i \\ 0 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_2 = \underline{v}_1 + \underline{v}_2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$

$\langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{w}_1, \underline{w}_2 \rangle = \Pi_0$ è

$$\det \begin{pmatrix} x & y & z \\ 2i & -i & 0 \\ 0 & 0 & 1+i \end{pmatrix} = 0$$

$-i(1+i)x - 2i(1+i)y = 0 \Rightarrow \boxed{x + 2y = 0}$

giacitura reale

(iii) π per $P = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è $\quad x + 2y = 0$

le direzioni isotrope in Π_0 sono i vettori $\underline{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$

t. c.

4

$$\begin{cases} l^2+m^2+n^2=0 \\ l+2m=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4m^2+m^2+n^2=0 \\ l=-2m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 5m^2+n^2=0 \\ l=-2m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n=\pm i\sqrt{5}\,m \\ l=-2m \end{cases}$$

Pertanto sono i vettori

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ i\sqrt{5} \end{pmatrix} \qquad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -i\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow \quad l_1: \quad \underline{x} = P + t\,\underline{b}_1, \quad t \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x &= 2-2t \\ y &= t \qquad\qquad t \in \mathbb{C} \\ z &= it\sqrt{5} \end{aligned}$$

e $\quad l_2: \quad \underline{x} = P + t\,\underline{b}_2, \quad t \in \mathbb{C}$

$$\begin{aligned} x &= 2-2t \\ y &= t \\ z &= -it\sqrt{5} \qquad\qquad t \in \mathbb{C} \end{aligned}$$