Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

V Appello - Febbraio/Marzo 2023

- Scrivere negli appositi spazi **COGNOME & NOME**
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: .....

Esercizio 1. Sia dato lo spazio vettoriale numerico $V = \mathbb{R}^4$, munito di base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ e della forma bilineare simmetrica non degenere b definita, rispetto alla base $\mathcal{E}$, dalla matrice

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Posto $U := \text{Span}\{\underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2\}$, determinare equazioni cartesiane e parametriche del sottospazio vettoriale $U^{\perp_b}$ che e' b -ortogonale al sottospazio U in V .
- (ii) Stabilire se U interseca $U^{\perp_b}$ in modo non banale.
- (iii) Determinare i vettori b -isotropi in $U^{\perp_b}$.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo numerico $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$, munito di riferimento proiettivo standard, sia consideri la quaterna di punti

$$P_0 = [1, 2 - 1], P_1 = [0, 1, 1], P_2 = [2, 1, -5], P_3 = [1, -2, -5],$$

espressi in coordinate omogenee rispetto al riferimento proiettivo dato.

(i) Determinare la dimensione proiettiva del sottospazio proiettivo

$$P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$$

congiungente i quattro punti della quaterna.

(ii) Denotando con $[X_0, X_1, X_2]$ coordinate omogenee in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ rispetto al riferimento standard, determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane del sottospazio proiettivo $P_0 \vee P_1 \vee P_2 \vee P_3$.

(iii) Dalla risposta (i), stabilire se ha senso calcolare il birapporto della quaterna ordinata (P_0, P_1, P_2, P_3) ed, in caso di risposta affermativa, determinare esplicitamente il valore del suddetto birapporto.

Esercizio 3. Nel piano affine reale $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$, con riferimento affine canonico $RA(O, \mathcal{E})$ e coordinate affini (x, y) rispetto a tale riferimento, sia data $\mathcal{C}$ la conica affine di equazione cartesiana

$$\mathcal{C} : xy - 3x - 2y + 4 = 0.$$

- (i) Classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$.
- (ii) Determinare le coordinate dell'eventuale centro di $\mathcal{C}$ e le equazioni cartesiane degli eventuali asintoti di $\mathcal{C}$.
- (iii) Si consideri l'immersione canonica di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^2$ in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ come sua carta affine $\mathcal{A}_0$, i.e.

$$(x, y) \rightarrow [1, x, y].$$

Dopo aver verificato che il punto $K := [0, -2, -2] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$ non è punto improprio della conica affine $\mathcal{C}$, determinare l'equazione cartesiana del diametro d della conica affine $\mathcal{C}$ rispetto al punto K .

(i) La matrice completa associata a $\bar{e}$:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -3/2 & -1 \\ -3/2 & 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

Visto che $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \bar{e}$ non degenera

Inoltre $\det(A_{00}) = \det \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} < 0 \Rightarrow \bar{e}$ iperbole generale

(ii) Poiché $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$ allora

$$\bar{e}: x_1 x_2 - 3x_1 x_0 - 2x_2 x_0 + 4x_0^2 = 0$$

I punti impropri di $\bar{e}$ sono dunque

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \bar{e} \end{cases} \text{ cioè } U_1 = [0, 1, 0] \text{ e } U_2 = [0, 0, 1]$$

Il centro di $\bar{e}$ è l'intersezione dei due asintoti di $\bar{e}$ che sono le rette date da

$$(0 \ 0 \ 1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 - 2x_0 = 0$$

$$(0 \ 0 \ 1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - x_2 = 0$$

quindi in coordinate affini $\begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \end{cases} \Rightarrow C = (2, 3)$

(iii) $K \neq U_1$ e U_2 quindi non è punto improprio di $\bar{e}$

Il diametro è dato dalla traccia nella carta

affine $A_0 = A_{112}^2$ delle rette proiettive

$$(0 \ 1 \ 1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -5x_0 + x_1 + x_2 = 0$$

che è dunque $x + y = 5$.

Esercizio 2

②

$$(i) \underline{P} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & -5 & -5 \end{pmatrix} \text{ è t.c. } \operatorname{rg}(\underline{P}) = 2 \Rightarrow \mathbb{P}_0 \vee \mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}_2 \vee \mathbb{P}_3 \bar{c}$$

una retta proiettiva in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

(ii) Eq. cartesiane

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 3x_0 - x_1 + x_2 = 0$$

Eq. parametriche

$$\underline{X} = \lambda \underline{P}_0 + \mu \underline{P}_1 \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

$$x_0 = \lambda$$

$$x_1 = 2\lambda + \mu$$

$$x_2 = -\lambda + \mu$$

(iii) Sia $l = \mathbb{P}_0 \vee \mathbb{P}_1 \vee \mathbb{P}_2 \vee \mathbb{P}_3$ retta in $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2$

Consideriamo su l

$$\underline{P}_0 = [1, 0] \quad \text{e} \quad \underline{P}_1 = [0, 1]$$

$$\text{Ora } \underline{P}_0 = [\underline{P}_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}] \quad \text{e} \quad \underline{P}_1 = [\underline{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}] \quad \text{ed inoltre}$$

$$\underline{P}_2 = [\underline{P}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = 2\underline{P}_0 - 3\underline{P}_1] \quad \underline{P}_3 = [\underline{P}_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} = -\underline{P}_0 + 4\underline{P}_1]$$

Per tanto su l si ha che

$$\underline{P}_2 = [2, -3] \quad \text{e} \quad \underline{P}_3 = [-1, 4]$$

Dunque

$$\begin{aligned} (\underline{P}_0, \underline{P}_1, \underline{P}_2, \underline{P}_3) &= [\det(\underline{P}_0 \underline{P}_2) \det(\underline{P}_1 \underline{P}_3), \det(\underline{P}_0 \underline{P}_3) \det(\underline{P}_1 \underline{P}_2)] \\ &= [-3, -8] = [3, 8] \end{aligned}$$

Esercizio 1

①

(i) Consideriamo

$$\underline{e}_3^t = (0 \ 0 \ 1 \ 0)$$

$$(\underline{e}_1 + \underline{e}_2)^t = (1 \ 1 \ 0 \ 0) \Rightarrow \begin{pmatrix} \underline{e}_3^t \\ (\underline{e}_1 + \underline{e}_2)^t \end{pmatrix} \cdot A \cdot \underline{x} = \underline{0}$$

determinare eq. cartesiane di $U^{\perp b}$, ove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$

$$U^{\perp b} \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \quad \underline{\text{eq. cartesiane}}$$

$$\begin{cases} x_1 = s - 2t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \\ x_4 = s \end{cases} \quad t, s \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{eq. parametriche}}$$

(ii) Le eq. cartesiane di U sono date da

$$\text{rg} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\text{si ha } U \cap U^{\perp b} : \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow U \cap U^{\perp b} = \{ \underline{0} \}$$

(iii) Il generico vettore di $U^{\perp b}$ è $\begin{pmatrix} s-2t \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix}$. Impone di essere b -isotropo fornisce

$$(s-2t \ 0 \ t \ s) A \begin{pmatrix} s-2t \\ 0 \\ t \\ s \end{pmatrix} = 0$$

e si ottiene come isotropo dato da $\text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \cup \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$