SVOLGIMENTO

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

IV Appello - Settembre 2022

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ e coordinate (x_1, x_2, x_3, x_4) rispetto a tale base, sia data la forma quadratica

$$\mathcal{Q}(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_2x_3 - 2x_2x_4 - x_4^2.$$

Sia $b := b_{\mathcal{Q}}$ la forma bilineare simmetrica polare associata alla forma quadratica $\mathcal{Q}$.

(i) Considerato il sottospazio $U := \langle \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \rangle$, determinare equazioni cartesiane del sottospazio $U^{\perp_b}$ che e' il sottospazio b-ortogonale ad U.

(ii) Determinare il radicale di b.

(iii) Descrivere il cono b-isotropo nel sottospazio $U^{\perp_b}$.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale numerico $V = \mathbb{R}^3$, munito di base canonica $\mathcal{E} := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$, e sia $f \in \mathrm{End}(V)$ definito da

$$f(\underline{e}_1) = 2f(\underline{e}_2) = -2f(\underline{e}_3) = 2(\underline{e}_2 + \underline{e}_3).$$

(i) Stabilire se f e' diagonalizzabile oppure solo triangolabile su $\mathbb{R}$.

(ii) Stabilire se f e' *nilpotente*, i.e. se esiste un intero positivo n per cui $f^n = 0$ ed, in caso di risposta affermativa, determinare l'intero minimo n (detto *indice di nilpotenza* di f) per cui cio' accade.

(iii) Determinare il polinomio minimo di f e la forma canonica di Jordan di f.

Esercizio 3. Nel piano affine complessificato $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $RA(O; x, y)$ reale. Al variare di un parametro reale $t \in \mathbb{R}$, si consideri la conica affine $\mathcal{C}_t$ che, rispetto al riferimento reale scelto, ha equazione cartesiana reale:

$$\mathcal{C}_t : 2x^2 + 4txy + 2y^2 + 2t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, la conica $\mathcal{C}_t$ e' non–degenere e, per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, la conica $\mathcal{C}_t$ e' una conica a centro.

(ii) Determinare per quali valori di $t \in \mathbb{R}$, la conica $\mathcal{C}_t$ e' un'iperbole generale nel piano affine complessificato $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$.

(iii) Per ogni valore di $t \in \mathbb{R}$ trovato al punto (ii), determinare le coordinate del centro di simmetria e le equazioni cartesiane degli asintoti dell'iperbole generale $\mathcal{C}_t$.

Esercizio 1

(i) La forma bilineare b ha matrice rappresentativa

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Poichè $U = \langle \underline{e}_3, \underline{e}_1 + \underline{e}_2 \rangle \Rightarrow$

$$U^{\perp_b} := \begin{cases} \underline{x}^t B \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ \underline{x}^t B \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \circ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \\ (x_1\ x_2\ x_3\ x_4) \circ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 = 0 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 \end{cases}$$

$\Rightarrow \dim(U^{\perp_b}) = 2$

(ii) Poichè $rg(B) = 4 \Rightarrow Rad(V) = \{\underline{0}\}$

(iii) $$U^{\perp_b} = \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + 2x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow U^{\perp_b} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\Rightarrow \underline{u} = \begin{pmatrix} 2s+t \\ 0 \\ -s \\ t \end{pmatrix}$ è il generico vettore in $U^{\perp_b}$.

Ora $\underline{u} \in U^{\perp_b}$ è b-isotropo $\Leftrightarrow$

$$(2s+t)^2 - t^2 = 0 \Leftrightarrow 4s^2 + 4st = 0$$

$$\Leftrightarrow 4s(s+t) = 0$$

$s = 0 \rightsquigarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ è un sottospazio isotropo

$s = -t \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -t \\ 0 \\ t \\ t \end{pmatrix} \Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

Pertanto il cono b-isotropo in $U^{\perp_b}$ è l'unione di due rette vettoriali

$$\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \cup \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Esercizio 2

(i) Dalle condizioni date

$$\begin{aligned} f(\underline{e}_1) &= 2\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3 \\ f(\underline{e}_2) &= \underline{e}_2 + \underline{e}_3 \\ f(\underline{e}_3) &= -\underline{e}_2 - \underline{e}_3 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $rg(M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)) = 1 \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 2$

$\Rightarrow \lambda = 0$ è sicuramente un autovalore di f di molteplicità algebrica almeno 2 $\Rightarrow P_f(x) = x^2(\mu - x)$

con μ eventuale ulteriore autovalore.

Ma poiché $\mu + 0 + 0 = tr(M_{\mathcal{E},\mathcal{E}}(f)) = 1 - 1 + 0 = 0$

$\Rightarrow \mu = 0 \Rightarrow P_f(x) = -x^3$

Visto che $m_a(0) > m_g(0) \Rightarrow f$ non diagonalizzabile

ma f è triangolabile su $\mathbb{R}$ visto che $Sp(f) = \{0\} \subset \mathbb{R}$

(ii) Visto che $P_f(x) = -x^3 \Rightarrow$ sicuramente $f^3 = 0$

per Cayley-Hamilton

Ma più precisamente

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}^2 = 0 \Rightarrow ord(f) = 2$$

(iii) Da (ii) si ha che $m_f(x) = x^2$ e dunque

$J(f)$ ha 2 blocchi, uno di ordine 2 ed uno

di ordine 1, i.e.

$$J(f) = \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Esercizio 3

(i) $A_t = \begin{pmatrix} 2t & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2t \\ 0 & 2t & 2 \end{pmatrix}$

$\det(A_t) = 2t(4-4t^2) = 8t(1-t^2)$

$\Rightarrow \mathcal{C}_t$ è non-degenere per $t \neq 0, \pm 1$

$\det((A_t)_{00}) = 4(1-t^2) \Rightarrow \mathcal{C}_t$ è a centro per $t \neq \pm 1$.

(ii) $\mathcal{C}_t$ è un'iperbole generale $\Leftrightarrow$

$\det((A_t)_{00}) < 0 \Leftrightarrow 4(1-t^2) < 0 \Leftrightarrow$

$t^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow \boxed{t < -1 \text{ e } t > 1}$

(iii) Il centro di simmetria è dato da

$$\begin{pmatrix} 2 & 2t \\ 2t & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{con } t < -1 \text{ e } t > 1$$

cioè $\begin{cases} 2x + 2ty = 0 \\ 2t + 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow C = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ è l'origine

I punti impropri di $\mathcal{C}_t$ sono

$$\begin{cases} 2x_1^2 + 4t\,x_1 x_2 + 2x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

Notiamo che $x_2 \neq 0$, altrimenti avremmo $[0,0,0]$ ⨳,

Ponendo $s := \dfrac{x_1}{x_0}$ si ha $2s^2 + 4ts + 2 = 0$ cioè

$s^2 + 2ts + 1 = 0 \qquad s = \dfrac{-2t \pm \sqrt{4t^2-4}}{2} = -t \pm \sqrt{t^2-1}$

Pertanto si hanno

$P_1 = [0, t + \sqrt{t^2-1}, 1]$ e $P_2 = [0, t - \sqrt{t^2-1}, 1]$

Gli asintoti sono

$\underline{x - (t + \sqrt{t^2-1})y = 0}$ e $\underline{x + (\sqrt{t^2-1} - t)y = 0}$