SVOLGIMENTO

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

III Appello - Settembre 2022

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} := RC(O; x, y, z)$ ortonormale reale. Sia data la retta r che, in tale riferimento $\mathcal{R}$, ha equazioni cartesiane:

$$r : \begin{cases} 2x + (1-i)y + i & = 0 \\ (1+i)x + 2y - (1-i)z - 1 & = 0 \end{cases}.$$

(i) Stabilire se la retta r e' una retta di I specie e se r e' priva di punti reali.

(ii) Stabilire se nel fascio di piani di asse la retta r esiste un unico piano reale α nel fascio e, nel caso di risposta affermativa, determinare l'equazione cartesiana del piano reale α.

(iii) Determinare le direzioni isotrope del piano α.

Esercizio 2. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ sia assegnato il riferimento affine standard $RA(O; x, y)$. Si consideri il completamento proiettivo di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ dato dall'inclusione naturale

$$(x, y) \longrightarrow [1, x, y]$$

e siano $[x_0, x_1, x_2]$ le coordinate omogenee del piano proiettivo numerico $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

(i) Determinare il punto improprio P della parabola $\mathcal{P} \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $y = 2x^2 - 3x + 1$.

(ii) Determinare le equazioni cartesiane del fascio di rette affini r_t, $t \in \mathbb{R}$ parametro, che sono traccia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ del fascio di rette proiettive di centro il punto P.

(iii) Determinare l'intersezione della retta r_t con la parabola $\mathcal{P}$, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$, e determinare la proiezione di questa intersezione sull'asse x, al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti $P = [1, 0, 0, 1]$, $Q = [1, -1, -1, -1]$ e la retta r, congiungente i punti P e Q. Si denotino con $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ le coordinate omogenee duali nello spazio proiettivo duale $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$.

(i) Determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane della retta r nelle coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

(ii) Determinare dimensione ed equazioni omogenee parametriche e cartesiane, nelle coordinate omogenee duali $[a_0, a_1, a_2, a_3]$ di $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$, del sottospazio proiettivo $r^\vee \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ descrivente il sistema lineare di piani $\Lambda(r)$ di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di centro la retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

(iii) Determinare equazioni cartesiane di tutti quei piani di $\Lambda(r)$ che passano per il punto $H = [0, 1, 2, 0]$.

Esercizio 1

(i) $\bar{r}: \begin{cases} 2x + (1+i)y - i = 0 \\ (1-i)x + 2y - (1+i)z - 1 = 0 \end{cases}$ pertanto

$$rg\begin{pmatrix} r \\ \bar{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1-i & 0 & +i \\ 1+i & 2 & -1+i & -1 \\ 2 & 1+i & 0 & -i \\ 1-i & 2 & -1-i & -1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & +1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè $R_1 = R_2 + R_3 + R_4 \Rightarrow rg\begin{pmatrix} r \\ \bar{r} \end{pmatrix} \leq 3 \Rightarrow r$ e $\bar{r}$ sono complanari $\Rightarrow r$ è di I specie

Poichè $\underline{v}_r = (1, -(1+i), -i)$ e $\underline{v}_{\bar{r}} = (1, -1+i, i) \Rightarrow$ r e $\bar{r}$ non sono parallele pertanto $r \cap \bar{r} \neq \phi$ e r ha un punto reale che è $P = r \cap \bar{r}$.

(ii) Il fascio di piani di asse r è

$$\lambda(2x + (1-i)y + i) + \mu((1+i)x + 2y - (1-i)z - 1) = 0$$

Poichè r è di I specie $\Rightarrow$ l'unico piano reale è quello che contiene $\bar{r}$. Questa condizione imposta al fascio determina

$$\underline{\alpha: \quad x + y - z = 0}$$

(iii) Le direzioni isotrope in α sono date da

$\begin{cases} l + m - n = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 0 \end{cases}$ cioè $\underline{v} = \begin{pmatrix} \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2} \\ 1 \pm i\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Esercizio 2

(i) P è dato da $\begin{cases} x_0 = 0 \\ 2x_1^2 = 0 \end{cases}$ cioè $P = [0,0,1]$

(ii) il fascio di rette proiettive di centro P è dato da

$$\lambda x_0 + \mu x_1 = 0 \quad , \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

Se $\mu = 0$, la retta del fascio è $x_0 = 0$ che ha traccia vuota di $(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})_0$ pertanto possiamo assumere $\mu \neq 0$ e porre $t := \frac{\lambda}{\mu} \in \mathbb{R}$

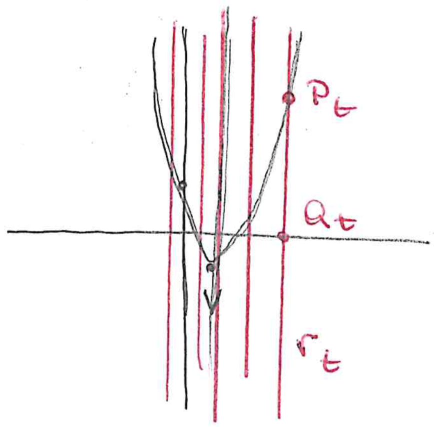
Le rette traccia in $(\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}})_0$, ove $x = \frac{x_1}{x_0}$ e $y = \frac{x_2}{x_0}$, sono

$$-\frac{\lambda}{\mu} = x \quad \text{cioè} \quad x = -t, \ t \in \mathbb{R}$$

(iii) Presa $r_t : \{x = -t\} \Rightarrow \mathcal{P} \cap r_t = \begin{cases} y = 2x^2 - 3x + 1 \\ x = -t \end{cases}$

è il punto $P_t := (-t, 2t^2 + 3t + 1)$

La sua proiezione è il punto $Q_t = (-t, 0)$



Esercizio 3

(i) $r: \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_0 = \lambda + \mu \\ x_1 = -\mu \\ x_2 = -\mu \\ x_3 = \lambda - \mu \end{cases}$$ equazioni parametriche

$$rg \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2 \iff \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$$

(ii) $\dim(\Lambda(r)) = \dim(\mathrm{Ann}_{\mathbb{R}^4}(W)) - 1$, dove $W \subset \mathbb{R}^4$ sp. vettoriale t.c. $r = \mathbb{P}(W)$

Ora $\dim(\mathrm{Ann}_{\mathbb{R}^4}(W)) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \dim(\Lambda(r)) = 1$

cioè $\Lambda(r)$ è un fascio di piani

$\Lambda(r)$ è $\lambda(x_0 + x_1 + x_2 - x_3) + \mu(x_1 - x_2) = 0$

cioè $\lambda x_0 + (\lambda+\mu) x_1 + (\lambda - \mu) x_2 - \lambda x_3 = 0$

Pertanto le eq. parametriche di $r^\vee \subset (\mathbb{P}^3)^*$ sono

$$\begin{cases} a_0 = \lambda \\ a_1 = \lambda + \mu \\ a_2 = \lambda - \mu \\ a_3 = -\lambda \end{cases}$$ eq. parametriche di $r^\vee$

mentre equazioni cartesiane $\begin{cases} a_0 + a_3 = 0 \\ a_1 + a_2 + 2a_3 = 0 \end{cases}$

(iii) Poiché $H = [0, 1, 2, 0] \notin r \Rightarrow \exists!$ piano α_H del fascio $\Lambda(r)$ che passa per H. Imponendo il passaggio per H si ha:

$$\lambda \cdot 0 + (\lambda+\mu)\cdot 1 + (\lambda - \mu)\cdot 2 - \lambda \cdot 0 = 0 \iff 3\lambda - \mu = 0$$

$\iff \mu = 3\lambda \iff \alpha_H: x_0 + 4x_1 - 2x_2 - x_3 = 0$