

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Appello - Luglio 2022

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME:

Esercizio 1. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$, si consideri il punto P di coordinate $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ in questo riferimento.

- (i) Determinare le equazioni dell'isometria fornita dalla rotazione attorno al punto P di angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- (ii) Scrivere equazioni parametriche e cartesiane della retta ℓ ottenuta ruotando la retta $r : x - y + 1 = 0$ attorno al punto P con un angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$.
- (iii) Scrivere l'equazione cartesiana del luogo geometrico ottenuto facendo ruotare attorno al punto P di angolo $\theta = \frac{\pi}{6}$ la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro O e raggio 1.

Esercizio 2. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ sia data la proiettività $f \in PGL(3, \mathbb{R})$ associata alla classe di proporzionalità della seguente matrice

$$A := \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- (i) Determinare quali tra le rette fondamentali di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono rette stabili per la proiettività f .
- (ii) Tra le rette fondamentali f -stabili trovate al punto (i), stabilire quali tra esse sono rette di punti fissi per f .
- (iii) Determinare tutti i punti fissi di f .

Esercizio 3. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$, sia data la conica $\mathcal{C}$ di equazione cartesiana

$$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 4x - 3 = 0.$$

- (i) Classificare dal punto di vista affine la conica $\mathcal{C}$.
- (ii) Determinare, in opportune coordinate (x', y') , la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ trovando esplicitamente l'isometria tra il riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$ originario ed il riferimento $RC(O'; x', y')$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica metrica.
- (iii) Scrivere le equazioni cartesiane, nel riferimento originario $RC(O; x, y)$ degli eventuali assi di simmetria, dell'eventuale centro di simmetria e degli eventuali asintoti della conica $\mathcal{C}$.
- (iv) Ridurre $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica affine, in opportune coordinate (x'', y'') , trovando esplicitamente l'affinità tra il riferimento originario $RC(O; x, y)$ ed il riferimento affine $RA(O''; x'', y'')$ in cui $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica affine.

Esercizio 1

$$\begin{aligned}
 (i) \quad R_{P, \pi/6} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= (t_P \circ R_{O, \pi/6} \circ t_{-P}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (t_P \circ R_{O, \pi/6}) \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} = \\
 &= R_{O, \pi/6} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - R_{O, \pi/6} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\
 &+ \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \cos \pi/6 & -\sin \pi/6 \\ \sin \pi/6 & \cos \pi/6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \\
 &\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right] \Rightarrow \begin{cases} x' = \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y' = \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{cases}
 \end{aligned}$$

(ii) La retta r ha vettore direttore $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ un vettore direttore di l sarà

$$\underline{v}_l := \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -1/2 \\ 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix}$$

La retta r contiene il punto $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ la retta l passa

$$\text{per il punto } Q' = R_{P, \pi/6}(Q) = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 0 - \frac{1}{2} \cdot 1 + 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Portanto

$$l: \underline{x} := \begin{pmatrix} \frac{3-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}+1}{2} \end{pmatrix} \quad \text{eq. param.}$$

(iii) Siccome $R_{P, \pi/6}$ è un'isometria $\Rightarrow R_{P, \pi/6}(l)$ è una circonferenza di stesso raggio $r=1$ e centro

$$R_{P, \pi/6}(O) = \begin{pmatrix} 2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1-2\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\left(x - \left(\frac{4-\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 + \left(y - \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2} \right) \right)^2 = 1$$

Esercizio 2

(i) I punti su H_0 sono della forma $[0, \alpha, \beta]$, $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$,

$$\text{e } f([0, \alpha, \beta]) = [2\beta - \alpha, \alpha - \beta, \beta] \Rightarrow H_0 \text{ non } \bar{f}\text{-stabile}$$

Discorso simile si ha per la retta H_1 , i.e. $x_1 = 0$.

Invece per H_2 : $x_2 = 0$, i punti sono $[\alpha, \beta, 0]$, $[\alpha, \beta] \in \mathbb{P}^1$, e

$$f([\alpha, \beta, 0]) = [\alpha + \beta, -\beta, 0]$$

$\Rightarrow$ l'unica retta $\bar{f}$ -stabile è $x_2 = 0$

(ii) Poiché $[\alpha + \beta, -\beta, 0] \neq [\alpha, \beta, 0]$ per $[\alpha, \beta]$ variabile in $\mathbb{P}^1 \Rightarrow x_2 = 0$ non è retta di punti fissi

(iii) $P_A(\lambda) = -(1+\lambda)(1-\lambda)^2$, pertanto gli autovalori di A sono $\lambda = \pm 1$

$$V_1(A) = \ker \left(\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} 2x_0 + x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrisponde a $F_1 = [1, -2, 0] \in H_2$

$$V_{-1}(A) = \ker \left(\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \right) = \begin{cases} x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ corrisponde a $F_2 = [1, 0, 0] \in H_2$

$\mathbb{P}$ ha solo due punti fissi che si trovano sulle rette $\bar{f}$ -stabili H_2 .

Svolgimento Esercizio 3: (i) La matrice simmetrica completa associata a $\mathcal{C}$ è la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1/2 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix},$$

che ha determinante diverso da zero. Pertanto $\mathcal{C}$ è una conica generale. La matrice simmetrica della forma quadratica associata alla conica è la sottomatrice A_0 che è di determinante $3/4$. Pertanto $\mathcal{C}$ è sicuramente un'ellisse.

Dall'equazione di $\mathcal{C}$, notiamo che il suo supporto contiene il punto di coordinate $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Pertanto, dalla classificazione delle ellissi generali, necessariamente deve contenere infiniti punti reali, i.e. $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a punti reali.

(ii) Il polinomio caratteristico della matrice simmetrica associata alla forma quadratica di $\mathcal{C}$ è

$$P_{A_0}(t) = t^2 - 2t + \frac{3}{4}$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 1/2 \quad \lambda_2 = 3/2.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A_0 è ad esempio la base

$$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base è quindi

$$M = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente ortogonale. Denotando con $\bar{s} = \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$ le coordinate in questo riferimento ortonormale, la trasformazione di coordinate è quindi

$$\underline{x} = M\bar{s},$$

cioè

$$x = \sqrt{2}/2s - \sqrt{2}/2t, \quad y = \sqrt{2}/2s + \sqrt{2}/2t.$$

Sostituendo nell'equazione di $\mathcal{C}$, e ricordando che le coordinate (s, t) diagonalizzano la forma quadratica associata all'equazione di $\mathcal{C}$, si trova rapidamente che l'equazione della conica $\mathcal{C}$ in tali coordinate diventa

$$s^2 + 3t^2 - 2\sqrt{2}s + 2\sqrt{2}t - 6 = 0.$$

Consideriamo ora la traslazione

$$\underline{s} = \underline{z} + \underline{c}$$

dove $\underline{z} = \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ e $\underline{c} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$, con α e β da determinare opportunamente. Sostituendo nella nuova equazione di $\mathcal{C}$ si ottiene

$$z^2 + 3w^2 + 2(\alpha - \sqrt{2})z + 2(3\beta + \sqrt{2})w + \alpha^2 + 3\beta^2 - 2\sqrt{2}\alpha + 2\sqrt{2}\beta - 6 = 0.$$

Scegliendo $\alpha = \sqrt{2}$ e $\beta = -\sqrt{2}/3$, si ottiene

$$z^2 + 3w^2 = 10,$$

e quindi $\underline{c} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}/3 \end{pmatrix}$. Dividendo tutto per 10, ritroviamo che $\mathcal{C}$ è un'ellisse generale a punti reali e che il riferimento che ha coordinate (z, w) è il riferimento (x', y') richiesto dove $\mathcal{C}$ assume la sua forma canonica che è

$$\mathcal{C} : \frac{(x')^2}{10} + \frac{(y')^2}{10/3} = 1.$$

Da quanto scritto precedentemente, l'isometria che porta $\mathcal{C}$ nella sua forma canonica metrica è data da

$$\underline{x} = M(\underline{z} + \underline{c}) = M\underline{z} + M\underline{c}.$$

Visto che $M\underline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$, le formule per questa isometria sono

$$x = \sqrt{2}/2x' - \sqrt{2}/2y' + 4/3, \quad y = \sqrt{2}/2x' + \sqrt{2}/2y' + 2/3.$$

(iii) $\mathcal{C}$ ha centro di simmetria l'origine di questo nuovo riferimento, e gli assi di simmetria gli assi coordinati. Nelle coordinate del riferimento iniziale, il centro di simmetria di $\mathcal{C}$ si ottiene per $\underline{z} = \underline{0}$, pertanto tale centro è $M\underline{c} = \begin{pmatrix} 4/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$. L'isometria inversa è $\underline{z} = {}^t M \underline{x} - \underline{c}$, i.e.

$$x' = \sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y - \sqrt{2}, \quad y' = -\sqrt{2}/2x + \sqrt{2}/2y + \sqrt{2}/3.$$

Pertanto, l'asse di simmetria $x' = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$x + y = 2$$

mentre l'asse di simmetria $y' = 0$ corrisponde, nel riferimento iniziale, alla retta

$$x - y = 2/3.$$

(iv) Per trovare la forma canonica affine di $\mathcal{C}$, consideriamo la sua forma canonica metrica ed applichiamo il procedimento di Sylvester alla forma quadratica associata all'equazione di $\mathcal{M}$. Se prendiamo, in base di Sylvester, indeterminate x'' e y'' , otteniamo la trasformazione

$$x' = \sqrt{10} x'', \quad y' = \sqrt{\frac{10}{3}} y''.$$

Con tale trasformazione, la forma canonica metrica di $\mathcal{C}$ si trasforma in

$$(x'')^2 + (y'')^2 = 1,$$

come doveva essere data la classificazione di $\mathcal{C}$. Prendiamo

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10/3} \end{pmatrix}$$

la matrice di questo cambiamento di coordinate. Poiché $\underline{x}' = S\underline{x}''$, dall'equazione vettoriale dell'isometria precedentemente trovata abbiamo $\underline{x} = MS\underline{x}'' + M\underline{c}$.

Calcolando il prodotto tra matrici, otteniamo che

$$MA = \begin{pmatrix} \sqrt{5} & -\sqrt{5}/3 \\ \sqrt{5} & \sqrt{5}/3 \end{pmatrix}.$$

Quindi le formule per l'affinità sono:

$$x = \sqrt{5}x'' - \sqrt{5}/3y'' + 4/3, \quad y = \sqrt{5}x'' + \sqrt{5}/3y'' + 2/3.$$