Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

I Appello - Giugno 2022

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Sia assegnata la forma bilineare simmetrica $b : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la cui matrice associata in base canonica $\mathcal{E}$ è:

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(i) stabilire se il vettore $\underline{v} := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e' b–isotropo.

(ii) Indicate con (x_1, x_2, x_3) le coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}$, stabilire se il sottospazio vettoriale U di equazione cartesiana $x_1 + x_2 = 0$ contiene il radicale di b.

(iii) Stabilire se esiste un sottospazio vettoriale di dimensione 2 su cui b induce un prodotto scalare, i.e. una forma bilineare simmetrica definita positiva.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale numerico reale $V = \mathbb{R}^3$ si consideri la base $\mathcal{B}$ composta dai vettori

$$\mathbf{v}_1 = (1, 0, 2),\ \mathbf{v}_2 = (0, 0, 1),\ \mathbf{v}_3 = (-1, 1, -2),$$

scritti per comodita' per righe di coordinate rispetto alla base canonica $\mathcal{E}$. Denotiamo con V^* lo spazio vettoriale duale di V e consideriamo il funzionale lineare

$$\mathbf{v}^* = (2, 1, -1) \in V^*,$$

scritto per comodita' sempre per riga di coordinate rispetto alla base $\mathcal{E}^*$ duale della base $\mathcal{E}$.

(i) Stabilire se $\mathbf{v}^*$ appartiene alla base duale di $\mathcal{B}$; in caso di risposta negativa, trovare la sua espressione come combinazione lineare degli elementi di $\mathcal{B}^*$

(ii) Denotate con (x_1, x_2, x_3) le coordinate di V rispetto alla base $\mathcal{E}$, stabilire se il funzionale lineare $\varphi \in V^*$ definito da

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 2x_1 - x_3$$

è proporzionale a $\mathbf{v}^*$.

(ii) Stabilire se ogni elemento di $V^* \setminus \langle \mathbf{v}^* \rangle$ ha nucleo che interseca Ker $\mathbf{v}^*$ propriamente, i.e. in modo non banale.

Esercizio 3. Nel piano euclideo reale $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con coordinate cartesiane (x, y), sia data γ la conica euclidea di equazione cartesiana

$$\gamma : \; 2x^2 + 2y^2 - 4xy - 3x + 3y - 2 = 0.$$

(i) Classificare γ dal punto di vista affine, deducendo la forma canonica affine di γ in opportune coordinate affini (x', y').
(ii) Determinare le equazioni cartesiana, nelle coordinate cartesiane (x, y), delle giaciture di eventuali assi di simmetria della conica euclidea γ.
(iii) Considerato il piano $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$ come carta affine di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dove $X_0 \neq 0$, determinare equazione cartesiana omogenea della conica $\overline{\gamma}$ ottenuta come chiusura proiettiva della conica γ e classificare $\overline{\gamma}$ dal punto di vista proiettivo.

Esercizio 1

(i) $b(\underline{x},y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 3x_2y_2 + 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + 2x_3y_3$

$\Rightarrow b(\underline{v},\underline{v}) = 1+1+1+3+2+2+2 = 12 \neq 0$

$\Rightarrow \underline{v}$ non è b-isotropo

(ii) $V^{\perp_b} = \ker(A)$

Notando che $R_2^A = R_1^A + R_3^A \Rightarrow rg(A) = 2$

e $\ker(A): \begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \ker(A) \subseteq \{x_1 + x_2 = 0\}$

(iii) Notiamo che

$1 > 0$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 > 0$

$\det(A) = 0$

$\Rightarrow b$ è semidef positiva con $rg = 2$

$\Rightarrow \exists W \subset \mathbb{R}^3$ con $\dim(W) = 2$ t.c. $b|_W$ è prodotto scalare

Esercizio 2

(i) $\underline{v}^*(\underline{v}_1) = 0 \qquad \underline{v}^*(\underline{v}_2) = -1 \qquad \underline{v}^*(\underline{v}_3) = 1$

$\Rightarrow \underline{v}^* \notin \mathcal{B}^*$

$\underline{v}^* = 2\underline{e}_1^* + \underline{e}_2^* - \underline{e}_3^*$

e $M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ cioè $c_{\mathcal{E}}(\underline{v}) = M_{\mathcal{E},\mathcal{B}} \circ c_{\mathcal{B}}(\underline{v})$

$\Rightarrow {}^tM_{\mathcal{E},\mathcal{B}} = M_{\mathcal{B}^*,\mathcal{E}^*} \Rightarrow$

$c_{\mathcal{B}^*}(\underline{v}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} c_{\mathcal{E}^*}(\underline{v}^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{v}^* = -\underline{v}_2^* + \underline{v}_3^*$

(ii) $\varphi(\underline{e}_1) = 2$ $\quad \underline{v}^*(\underline{e}_1) = 2$

$\varphi(\underline{e}_2) = 0$ $\quad \underline{v}^*(\underline{e}_2) = 1$ $\Rightarrow$ φ e $\underline{v}^*$ non

$\varphi(\underline{e}_3) = -1$ $\quad \underline{v}^*(\underline{e}_3) = -1$ proporzionali

(iii) $\mathrm{Ker}(\underline{v}^*) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \underline{v}^*(\underline{x}) = 0 \} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \}$

Ogni elemento in $\mathbb{V}^*$ definisce l'equazione di un iperpiano di $\mathbb{R}^3$ e, prendendo $V^* \setminus \langle \underline{v}^* \rangle$ sono sicuramente iperpiani indip. $\Rightarrow$ intersezione propria.

Esercizio 3

(i) $A = \begin{pmatrix} -2 & -3/2 & 3/2 \\ -3/2 & 2 & -2 \\ 3/2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$

$rg(A) = 2$ e $rg(A_0) = 1$ $\Rightarrow$ γ è parabola sempl. degenere. Poiché per $x=0$ si ottiene $y = \frac{3}{2}$ $\Rightarrow$ γ ha un punto reale. Quindi la sua f.c.a. è $\boxed{(y')^2 = 1}$ due rette reali parallele

(ii) Il punto improprio di γ è

$$\begin{cases} \cancel{2}x_1^2 + \cancel{2}x_2^2 - \cancel{4}^{2}x_1x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1 - x_2)^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow [0, 1, 1]$

l'asse della parabola ha giacitura $\boxed{x - y = 0}$

(iii) $\overline{\gamma}: \; 2x_0^2 + 3x_0x_1 - 3x_0x_2 - 2x_1^2 + 4x_1x_2 - 2x_2^2 = 0$

e la matrice di $\overline{\gamma}$ è $-A$ $\Rightarrow$ $\overline{\gamma}$ è conica semplicemente degenere a punti reali e quindi la sua forma canonica proiettiva è: $\boxed{Y_0^2 - Y_1^2 = 0}$