Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

VI Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti per preparazione al II esonero.
- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, siano dati i seguenti punti:

$$Q_0 = [-1, -2, 1],\ Q_1 = [0, 1, 1],\ Q_2 = [-4, -2, 10],\ Q_3 = [2, -4, -10].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono allineati in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(ii) In caso di risposta affermativa al punto (i), determinare l'equazione cartesiana omogenea della retta

$$\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$$

in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.
(iii) Stabilire se puo' esistere una proiettivita' di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che mandi la coppia ordinata Q_0, Q_1 nella coppia ordinata F_0, F_1, dove F_0 ed F_1 sono i punti fondamentali di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ nel riferimento $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$.
(iv) Stabilire se puo' esistere una proiettivita' di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ che mandi la terna ordinata Q_0, Q_1, Q_2 nella terna ordinata F_0, F_1, E_2, dove F_0, F_1 ed F_2 sono i punti fondamentali di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ nel riferimento $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$.

Esercizio 2. Con stesse ipotesi e notazioni come nell'**Esercizio 1**, sia $\ell \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ la retta proiettiva $\ell = \mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$, che e' isomorfa ad una retta proiettiva astratta $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$. Denotati con

$$\mathbf{v}_0 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \ e \ \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

i vettori rappresentanti i punti $Q_0 = [\mathbf{v}_0]$ e $Q_1 = [\mathbf{v}_1]$ su ℓ, si consideri il riferimento proiettivo $f : \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}} \to \ell$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ che ha come punti fondamentali $F_0 = [1, 0] = f^{-1}(Q_0)$, $F_1 = [0, 1] = f^{-1}(Q_1)$ e punto unita' $U = f^{-1}([\mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1])$.
(i) Determinare coordinate omogenee di $f^{-1}(Q_2)$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ rispetto al riferimento F_0, F_1, U di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.
(ii) Determinare coordinate omogenee di $f^{-1}(Q_3)$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ rispetto al riferimento F_0, F_1, U di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.
(iii) Calcolare il birapporto $\beta(f^-1(Q_0), f^{-1}(Q_1), f^{-1}(Q_2), f^{-1}(Q_3))$ della quaterna ordinata di punti $f^-1(Q_0), f^{-1}(Q_1), f^{-1}(Q_2), f^{-1}(Q_3)$ su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, si consideri la proiettivita' $f \in \mathrm{PGL}(3, \mathbb{R})$ individuata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$A := \left(\begin{array}{ccc} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

(i) Determinare l'unica retta ℓ, tra le tre rette fondamentali $H_0 : x_0 = 0$, $H_1 : x_1 = 0$ e $H_2 : x_2 = 0$ del riferimento di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, che risulta essere retta stabile per la proiettivita' f.
(ii) Stabilire se la retta ℓ e' retta di punti fissi per f.
(iii) Determinare i punti fissi di f e stabilire se qualcuno di questi punti fissi e' situato su ℓ.
(iv) Denotato con $\Lambda_1(C)$ il fascio di rette di centro il punto $C = [1, -2, 0] \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee, nelle coordinate duali $[a_0, a_1, a_2]$ di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$, del sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ corrispondente a $\Lambda_1(C)$.
(v) Verificare che $f(\Lambda_1(C)) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e' di nuovo un fascio di rette proiettive in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ e determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee, nelle coordinate duali $[a_0, a_1, a_2]$ di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$, del sottospazio proiettivo di $(\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}})^*$ corrispondente a $f(\Lambda_1(C)) \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 4. Nel piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico $\mathbf{e}_0\,\mathbf{e}_1\,\mathbf{e}_2$ che induce coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ su $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, sia data la conica proiettiva Γ che, nelle coordinate omogenee date, ha equazione cartesiana omogenea

$$x_0^2 + x_0x_2 - x_1^2 - x_1x_2 = 0.$$

(i) Determinare l'equazione matriciale della conica Γ.
(ii) Classificare dal punto di vista proiettivo la conica Γ.
(iii) Dedurre l'espressione della sua forma canonica proiettiva in opportune coordinate omogenee $[y_0, y_1, y_2]$.
(iv) Stabilire se Γ e' una conica irriducibile e ridotta.
(v) In caso di risposta negativa al punto (iv), determinare il luogo singolare di Γ e fornire equazioni cartesiane di $\mathrm{Sing}(\Gamma)$.