Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

V Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti.
- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nel piano proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^2$, dotato di riferimento proiettivo standard e coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$ rispetto a tale riferimento, siano dati i punti quattro punti

$$Q_0 = [1, 2 - 1],\ Q_1 = [0, 1, 1],\ Q_2 = [2, 1, -5],\ Q_3 = [1, -2, -5].$$

(i) Stabilire se i quattro punti dati sono in posizione generale in $\mathbb{P}^2$.
(ii) Stabilire la dimensione del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
(iii) In caso avvenga $\dim L(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \leq 1$, determinare equazioni parametriche omogenee del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.
(iv) In caso avvenga $\dim L(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3) \leq 1$, determinare equazioni cartesiane omogenee del sottospazio proiettivo $\mathcal{L}(Q_0, Q_1, Q_2, Q_3)$.

Esercizio 2. Nello spazio proiettivo numerico reale $\mathbb{P}^3$, con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2, X_3]$ rispetto al riferimento proiettivo standard, si considerino i punti $P = [1, 0, 0, 2]$, $Q = [0, 1, -1, 1]$ e $R = [1, 1, -1, 1]$.

(i) Verificare che i punti P, Q e R sono in posizione generale in $\mathbb{P}^3$.
(ii) Determinare la dimensione della stella di rette in $\mathbb{P}^3$ di centro il punto P.
(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane omogenee in $\mathbb{P}^3$ della retta proiettiva $\ell := \mathcal{L}(P, Q)$, i.e. la retta congiungente i punti P e Q.
(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di una retta proiettiva r di $\mathbb{P}^3$ tale che $\mathcal{L}(\ell, r) = \mathbb{P}^3$.
(v) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del piano proiettivo $\pi := \mathcal{L}(P, Q, R)$, generato dai tre punti non allineati dati.
(vi) Denotata con ℓ_0 la retta affine traccia della retta proiettiva ℓ nella carta affine $\mathbb{A}^3_0$, dove per definizione si ha $X_0 \neq 0$, e poste

$$x = \frac{X_1}{X_0},\ y = \frac{X_2}{X_0},\ z = \frac{X_3}{X_0}$$

le rispettive coordinate affini in $\mathbb{A}^3_0$, determinare equazioni parametriche e cartesiane di ℓ_0.

Esercizio 3. Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ con coordinate omogenee $[X_0, X_1, X_2]$. Si consideri la carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ munita di coordinate affini (x, y) ove, come usuale

$$x = \frac{X_1}{X_0}, \; y = \frac{X_2}{X_0}.$$

Si considerino in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ la retta r che, nelle coordinate affini della carta scelta, ha equazione cartesiana

$$r : x - 2y = 3$$

e la retta s, parallela a r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ e passante per il punto $P = (1, 2) \in \mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$.

(i) Denotato con $\mathcal{F}$ il fascio di rette affini in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$ generato dalle rette affini r e s, determinare equazioni del fascio $\overline{\mathcal{F}}$ di rette proiettive in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ individuato dai completamenti proiettivi delle rette affini di $\mathcal{F}$.

(ii) Determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane nelle coordinate duali del piano proiettivo duale $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})^\vee$ della retta $r_{\overline{\mathcal{F}}} \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})^\vee$ corrispondente al fascio di rette proiettive $\overline{\mathcal{F}}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

(iii) Indicata con $\overline{r}$ la chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ della retta affine r in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_0$, determinare equazioni cartesiane delle rette affini r_1 e r_2 che sono tracce di $\overline{r}$, rispettivamente nelle carte affini $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_1$, i.e. dove $X_1 \neq 0$, ed in $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_2$, i.e. dove $X_2 \neq 0$.

(iv) Trovare i punti impropri della retta affine r_1 nella carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_1$.

(v) Trovare i punti impropri della retta affine r_2 nella carta affine $\mathbb{A}^2(\mathbb{R})_2$.

Esercizio 4. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti $A = [1, 0, 0, 1]$, $B = [-1, 1, 1, 1]$ e la retta r, congiungente A e B.

Si denotino con $[u_0, u_1, u_2, u_3]$ le coordinate omogenee duali nello spazio proiettivo duale $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$, rispetto al riferimento proiettivo duale a quello canonico.
(i) Stabilire se la retta r é contenuta nel piano di equazione cartesiana $x_0+x_1+x_2-x_3 = 0$
(ii) Determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane della retta r.
(iii) Stabilire se la retta $r^* \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$, duale della retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, passa per il punto $P = [1, 1, 1, -1] \in (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ e se r^* é contenuta nel piano $\beta \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ di equazione cartesiana $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$.
(iv) Determinare dimensione ed equazioni omogenee parametriche e cartesiane nelle coordinate duali di $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ del sottospazio proiettivo $Z(r) \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ descrivente la stella di piani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di centro la retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.