

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

IV Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti.
- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME:

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$ sia fissata la base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4\}$ e si consideri il sottospazio $W = \text{Span}\{\underline{w}_1, \underline{w}_2\}$, ove

$$\underline{w}_1 := 2\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + 4\underline{e}_3 + \underline{e}_4, \quad \underline{w}_2 := \underline{e}_1 + \underline{e}_4.$$

- (i) Determinare $\dim(V/W)$
- (ii) Determinare una base $\mathcal{B}$ di V/W
- (iii) Scrivere le coordinate del vettore (classe)

$$[\underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4] = \underline{e}_1 + \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + \underline{e}_4 + W \in V/W$$

rispetto alla base $\mathcal{B}$ di V/W determinata al punto (ii).

- (iv) Determinare per $(V/W)^*$ la base $\mathcal{B}^*$ duale della base $\mathcal{B}$ di V/W determinata al punto (ii).
- (v) Determinare una base per $\text{Ann}_{\mathbb{R}^4}(W)$.

Esercizio 2. Sia data l'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_1 - x_2 \end{pmatrix}.$$

Sia $W := \text{Ker}(f)$.

(i) Determinare $\dim(W)$ e $\dim(\mathbb{R}^4/W)$.

(ii) Verificare che f e' suriettiva.

(iii) Se prendiamo i vettori

$$\underline{u}_1 := -\underline{e}_1 + \underline{e}_4, \quad \underline{u}_2 := \underline{e}_1 + 2\underline{e}_3,$$

sia

$$U := \text{Span}\{\underline{u}_1, \underline{u}_2\}$$

sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$. Verificare che U e W sono in somma diretta in $\mathbb{R}^4$.

(iv) Stabilire se in $\mathbb{R}^4/W$ si puo' avere l'eguaglianza tra vettori (classi) $[\underline{u}_1] = [\underline{u}_2]$.

(v) Denotato con $\bar{\mathcal{E}} := \{[\underline{e}_3], [\underline{e}_4]\}$ il sistema di vettori (classi) in $\mathbb{R}^4/W$, stabilire se il sistema $\bar{\mathcal{E}}$ costituisce una base per $\mathbb{R}^4/W$.

(vi) Sia $\bar{f} : \mathbb{R}^4/W \rightarrow \mathbb{R}^2$ l'applicazione definita da

$$\bar{f}([\underline{v}]) = f(\underline{v}).$$

Verificare che $\bar{f}$ e' un'applicazione lineare e dedurre che e' un isomorfismo di spazi vettoriali.

(vii) Se $\mathcal{F}$ denota la base canonica dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, determinare la matrice $M_{\mathcal{F}, \bar{\mathcal{E}}}(\bar{f})$ rappresentativa dell'applicazione lineare

$$\bar{f} : \mathbb{R}^4/W \rightarrow \mathbb{R}^2$$

nelle basi $\bar{\mathcal{E}}$ per $\mathbb{R}^4/W$ e $\mathcal{F}$ per $\mathbb{R}^2$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di prodotto scalare standard e di base canonica $\mathcal{E}$, si consideri l'endomorfismo $f \in \text{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 - x_3 \\ -x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire se f definisce un operatore autoaggiunto (equiv. simmetrico).
- (ii) In caso di risposta affermativa, utilizzando il Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, determinare una base ortonormale di autovettori di f .
- (iii) Determinare la forma diagonale di f ed una matrice invertibile C che, per coniugio, fornisca la forma diagonale di f a partire dalla matrice rappresentativa di f in base $\mathcal{E}$.

Esercizio 4. Sia $f \in \text{End}(\mathbb{R}^4)$ l'endomorfismo la cui matrice rappresentativa nel riferimento canonico $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^4$ è

$$A := M_{\mathcal{E}, \mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare il polinomio caratteristico di A
- (ii) Determinare il polinomio minimo di A
- (iii) Determinare la forma canonica di Jordan J di A .
- (iv) Determinare inoltre una matrice C invertibile tale che $C^{-1}AC = J$.