Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2021/2022
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof. A. Rapagnetta

II Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti.
- La consegna degli svolgimenti e' facoltativa
- Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE la numerazione dei quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nel piano vettoriale $\mathbb{R}^2$, munito di base canonica $\mathcal{E} = \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$ e di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia

$$\underline{u} = \underline{e}_1 + 3\underline{e}_2$$

e sia $U := \langle \underline{u} \rangle$. Sia $\tau_U \in End(\mathbb{R}^2)$ l'endomorfismo dato dalla riflessione rispetto ad U.
(i) Dedurre il polinomio caratteristico dell'endomorfismo τ_U e la sua forma diagonale.
(ii) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ che rappresenta l'endomorfismo τ_U nella base canonica $\mathcal{E}$.
(iii) Stabilire se $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ definisce un nuovo prodotto scalare su $\mathbb{R}^2$.
(iv) In caso di risposta negativa al punto (iii), classificare la forma quadratica su $\mathbb{R}^2$ definita da $M_{\mathcal{E}}(\tau_U)$ e scrivere esplicitamente la sua segnatura, la sua forma canonica di Sylvester e determinare una base di Sylvester.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica $\mathcal{E}$ e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Sia Π_U l'endomorfismo di $\mathbb{R}^4$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio vettoriale U.
(i) Stabilire il rango di Π_U.
(ii) Stabilire se Π_U e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare la sua forma diagonale in un'opportuna base.
(iii) Determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}(\Pi_U)$, cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore Π_U in base canonica $\mathcal{E}$.

Esercizio 3. Nel piano cartesiano $\mathbb{E}^2(\mathbb{R})$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$, sia data la retta

$$\ell: \ x + 2y + 3 = 0.$$

(i) Determinare le formule di riflessione rispetto alla retta ℓ.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta per riflessione rispetto alla retta r della circonferenza $\mathcal{D}$ di centro il punto $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio $r = 2$.

(iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta s passante per C e perpendicolare alla retta ℓ.

(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta t passante per C e parallela alla retta ℓ.

(v) Determinare la distanza tra le rette ℓ e t.

Esercizio 4. Si consideri lo spazio euclideo $\mathbb{E}^3(\mathbb{R})$, dotato di riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y, z)$. Siano dati i tre punti $A = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(i) Verificare che i tre punti non sono allineati.

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane dell'unica circonferenza $\mathcal{C}$ passante per i 3 punti A, B e C.

(iii) Dati ora il piano

$$\pi : \quad x + 2y = 0$$

e la retta

$$\ell : \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

trovare le equazioni cartesiane della retta r ottenuta per proiezione ortogonale della retta ℓ sul piano π.

(iv) Scrivere le formule di rotazione $R_{\frac{\pi}{2},\ell}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta orientata ℓ.

(v) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2},\ell}(r)$, ottenuta cioe' per rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ della retta r attorno alla retta orientata ℓ.