# 4

# Spazi Euclidei

Tramite il prodotto scalare, nello spazio affine della geometria euclidea si ritrovano la misura della lunghezza e degli angoli, oltre alla nozione di perpendicolarità. Ciò permette di estendere tali nozioni agli spazi euclidei, che sono spazi affini sul campo dei numeri reali sui quali è stata introdotta una struttura aggiuntiva.

## 4.1 La misura della lunghezza nella geometria euclidea

Nello spazio affine $\mathbb{E}$ della geometria euclidea, si consideri assegnato un segmento non nullo $u$ che viene utilizzato come unità di misura di lunghezza per i segmenti, mentre gli angoli vengono misurati in radianti. Come notato nel Capitolo 1, segmenti equipollenti hanno la stessa lunghezza: denotiamo con $|\mathbf{v}|$ la lunghezza (o modulo) del vettore geometrico $\mathbf{v}$ rispetto al vettore unitario $u$. Risultano così definite due applicazioni: la *lunghezza*

$$\begin{aligned} |\,.\,| : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto |\mathbf{v}| \end{aligned}$$

e la *norma* (il quadrato della lunghezza):

$$\begin{aligned} ||\,.\,|| : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} &\mapsto ||\mathbf{v}|| \stackrel{def}{=} |\mathbf{v}|^2. \end{aligned}$$

Il *prodotto scalare tra vettori geometrici* (o *prodotto scalare euclideo* in $\mathcal{V}_{\mathbb{E}}$) è definito dalla posizione:

$$\begin{aligned} \times : \mathcal{V}_{\mathbb{E}} \times \mathcal{V}_{\mathbb{E}} &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \stackrel{def}{=} \tfrac{1}{2}(||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| - ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}||). \end{aligned}$$

In particolare, $||\mathbf{v}|| = \mathbf{v} \times \mathbf{v}$ e dunque $|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$ per ogni vettore $\mathbf{v}$; inoltre, il prodotto scalare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ è sicuramente nullo se $\mathbf{v}$ oppure $\mathbf{w}$ è nullo. Se, invece, $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono entrambi non nulli, allora resta ben individuato l'angolo convesso

$$\widehat{\mathbf{vw}}$$

tra due segmenti orientati uscenti dallo stesso punto che rappresentano i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$:

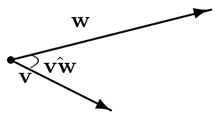


**Figura 4.1.** Angolo tra due vettori

**Proposizione 4.1.1.** *È possibile definire (in modo equivalente) il prodotto scalare euclideo tramite l'espressione*

$$\begin{cases} \mathbf{v} \times \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\widehat{\mathbf{vw}}) & \textit{quando } \mathbf{v}, \mathbf{w} \neq \mathbf{0} \\ 0 \ \textit{altrimenti.} \end{cases} \tag{4.1}$$

*In particolare,* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ *se e solo* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono ortogonali, cioè se almeno uno dei due vettori è nullo oppure* $cos(\widehat{\mathbf{vw}}) = 0$.

*Dimostrazione.* Fissato un punto $P$, siano $T$ e $S$ punti tali che $\mathbf{PT} = \mathbf{v}$, $\mathbf{TS} = \mathbf{w}$ e $\mathbf{PS} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$. Da $S$ si tracci la retta perpendicolare a $\mathbf{PT}$ e si denoti con $H$ la sua intersezione con la retta per $P$ e $T$. Per il Teorema di Pitagora, $||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| = ||\mathbf{PH}|| + ||\mathbf{HS}||$. Si osservi che $|\mathbf{PH}| = |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|cos(\widehat{\mathbf{vw}})$

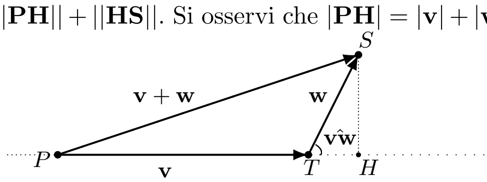


**Figura 4.2.** Proposizione 4.1.1

e che $|\mathbf{HS}| = |\mathbf{w}|sin(\widehat{\mathbf{vw}})$. Sostituendo, si trova che

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| &= (|\mathbf{v}| + |\mathbf{w}|cos(\widehat{\mathbf{vw}}))^2 + |\mathbf{w}|^2 sin^2(\widehat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||cos^2(\widehat{\mathbf{vw}}) + 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\widehat{\mathbf{vw}}) + ||\mathbf{w}||sin^2(\widehat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||(cos^2(\widehat{\mathbf{vw}}) + sin^2(\widehat{\mathbf{vw}})) + 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\widehat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| + 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\widehat{\mathbf{vw}}) \end{aligned}$$

e dunque $\frac{1}{2}(||\mathbf{v}+\mathbf{w}|| - ||\mathbf{v}|| - ||\mathbf{w}||) = 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\widehat{\mathbf{vw}})$ come si voleva. □

Il prodotto scalare è *omogeneo di primo grado* in entrambe le entrate:

$$(k\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times k\mathbf{w} \text{ per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}, k \in \mathbb{R}.$$

Osserviamo inoltre che $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ se e solo se i vettori sono ortogonali, cioè sono rappresentati da segmenti ortogonali (eventualmente nulli).

*Osservazione 4.1.2.* **Decomposizione ortogonale di un vettore lungo un altro** Siano dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Supponiamo che $\mathbf{v}$ sia un versore e che $\mathbf{w}$ sia non nullo, di modo che $|\mathbf{v}| = 1$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = |\mathbf{w}|\, cos(\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}})$. Fissiamo un punto $P$ come punto di applicazione: il versore $\mathbf{v}$ individua una retta $r$ per $P$ ad esso parallela, mentre il vettore $\mathbf{w}$ individua un punto $Q$ tale che $\mathbf{w} = \mathbf{PQ}$. Tracciando la retta per $Q$ perpendicolare e incidente $r$, si ottiene il punto $H$ su $r$ tale che $\mathbf{PH}$ e $\mathbf{HQ}$ sono ortogonali (vedi figura 4.5). Il segmento $PH$ è parallelo al versore $\mathbf{v}$ e ha lunghezza pari a $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = |\mathbf{w}|\, cos(\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}})$, e dunque $\mathbf{PH} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w})\, \mathbf{v}$. Poiché $\mathbf{w} = \mathbf{PQ} + \mathbf{HQ}$, abbiamo scritto il vettore $\mathbf{w}$ come somma di due vettori, il primo parallelo a $\mathbf{v}$ e il secondo ortogonale a $\mathbf{v}$.

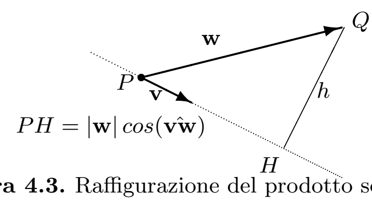


**Figura 4.3.** Raffigurazione del prodotto scalare con un versore

Tale espressione permette di verificare che il prodotto scalare euclideo è una applicazione bilineare simmetrica e definita positiva, cioè:
a) $(k\mathbf{v}) \times \mathbf{w} = k(\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = \mathbf{v} \times k\mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}, k \in \mathbb{R}$;
b) $(\mathbf{v} + \mathbf{v}') \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{v}' \times \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w} \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}$;
c) il prodotto scalare euclideo $\times$ è simmetrico: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}$;
d) il prodotto scalare euclideo $\times$ è definito positivo: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathcal{V}_{\mathbb{E}}$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
In particolare:

$$\begin{cases} (k\mathbf{v} + h\mathbf{v}') \times \mathbf{w} = k\mathbf{v} \times \mathbf{w} + h\mathbf{v}' \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times (k\mathbf{w} + h\mathbf{w}') = \mathbf{v} \times k\mathbf{w} + \mathbf{v} \times h\mathbf{w}' \end{cases} \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{V}(\mathbb{E}), k, h \in \mathbb{R}.$$

e la norma è una forma quadratica. Inoltre, poiché il coseno ha sempre valore assoluto minore di 1, l'uguaglianza 4.1 fornisce la disuguaglianza

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}|, \qquad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}) \tag{4.2}$$

che è un caso particolare della disuguaglianza di Cauchy-Schwartz (cf. 4.2.1 o [1], teorema (20.13)) che vedremo nel seguito.

La distanza di due punti $P$ e $Q$ è esattamente la lunghezza del segmento $PQ$ che unisce i due punti, cioè del vettore $\mathbf{PQ}$.
Lo spazio della geometria euclidea fornisce un esempio di spazio euclideo, in base alla definizione che verrà introdotta nel prossimo paragrafo.

**Proposizione 4.1.3.** *(Teorema del coseno)*

$$||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| - 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}}) \tag{4.3}$$

*Dimostrazione.* Il risultato è una applicazione del teorema del coseno (o Teorema di Carnot). Può essere dimostrato anche applicando la bilinearità del prodotto scalare.

Fissato un punto $P$, si scelgano i punti $T$ e $Q$ tali che $\mathbf{PT} = \mathbf{v}$ e $\mathbf{PQ} = \mathbf{w}$. Si osservi che $\mathbf{TQ} = \mathbf{v} - \mathbf{w}$. Da $P$ si tracci la retta perpendicolare a $\mathbf{PT}$ e si denoti con $H$ la sua intersezione con la retta per $P$ e $T$. Per il Teorema di Pitagora, $||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| = ||\mathbf{TH}|| + ||\mathbf{QH}||$. Si osservi che $|\mathbf{QH}| = |\mathbf{w}|sin(\hat{\mathbf{vw}})$ e che $|\mathbf{TH}| = |\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}})$.

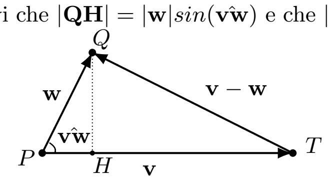


**Figura 4.4.** Teorema del coseno

Sostituendo, si trova che

$$\begin{aligned} ||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| &= (|\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}}))^2 + |\mathbf{w}|^2 sin^2(\hat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||cos^2(\hat{\mathbf{vw}}) - 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}}) + ||\mathbf{w}||sin^2(\hat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}||(cos^2(\hat{\mathbf{vw}}) + sin^2(\hat{\mathbf{vw}})) - 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}}) = \\ &= ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| - 2|\mathbf{v}||\mathbf{w}|cos(\hat{\mathbf{vw}}) \end{aligned}$$

□

## 4.2 Definizione di spazio euclideo e generalità

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine di dimensione finita $n$ su $\mathbb{R}$. Si dice che $\mathbb{E}$ è uno *spazio euclideo* se sullo spazio vettoriale reale $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ è assegnato un *prodotto scalare definito positivo*, che denoteremo con $\times$, cioè una applicazione

$$\begin{aligned} \times : \mathbf{V}(\mathbb{E}) \times \mathbf{V}(\mathbb{E}) &\to \mathbb{R} \\ (\mathbf{v}, \mathbf{w}) &\mapsto \mathbf{v} \times \mathbf{w} \end{aligned}$$

tale che:
PS1) $\times$ è bilineare:

$$\begin{cases} (k\mathbf{v} + h\mathbf{v}') \times \mathbf{w} = k\mathbf{v} \times \mathbf{w} + h\mathbf{v}' \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times (k\mathbf{w} + h\mathbf{w}') = \mathbf{v} \times k\mathbf{w} + \mathbf{v} \times h\mathbf{w}' \end{cases} \text{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in \mathbf{V}(\mathbb{E}), k, h \in \mathbb{R};$$

PS2) $\times$ è simmetrica: $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \mathbf{w} \times \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$;
PS3) $\times$ è definita positiva: $\mathbf{v} \times \mathbf{v} \geq 0$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ e $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.
Dato uno spazio euclideo $\mathbb{E}$, due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se lo sono rispetto al prodotto scalare $\times$, cioè se e solo se $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$: in tal caso, scriviamo

$$\mathbf{v} \perp \mathbf{w}.$$

La *lunghezza* di un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ è il numero reale

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \tag{4.4}$$

che viene indicato anche con il simbolo $v$. Un vettore di lunghezza 1 si dice un *versore*. Poiché il prodotto scalare $\times$ è definito positivo, un vettore è nullo se e solo se la sua lunghezza è nulla: $\mathbf{v} = 0$ se e solo se $v = 0$.
La *distanza* $d(P, Q)$ di due punti $P$ e $Q$ è definita ponendo

$$d(P, Q) = |\mathbf{PQ}|. \tag{4.5}$$

Le proprietà fondamentali della distanza così definita sono le seguenti:
(D1) *Positività*: per ogni coppia $P$, $Q$ di punti di $\mathbb{E}$ si ha $d(P, Q) \geq 0$ e $d(P, Q) = 0$ se e solo se $P = Q$;
(D2) *Simmetria*: per ogni coppia $P$, $Q$ di punti di $\mathbb{E}$ si ha $d(P, Q) = d(Q, P)$;
(D3) *Disuguaglianza triangolare*: per ogni terna $P$, $Q$, $R$ di punti di $\mathbb{E}$ si ha

$$|d(P, Q) - d(Q, R)| \leq d(P, R) \leq d(P, Q) + d(Q, R) \tag{4.6}$$

Mentre le proprietà (D1) e (D2) sono conseguenza diretta del fatto che $\times$ è un prodotto scalare definito positivo, la (D3) richiede una dimostrazione più complessa (cfr. il Corollario 4.2.2 o [1], cap. 20, par. 5, Corollario 20.15).
Analizziamo in dettaglio alcune proprietà del prodotto scalare definito positivo $\times$, per ricavare, in particolare, la proprietà (D3) della distanza:

**Proposizione 4.2.1. (Disuguaglianza di Cauchy-Schwartz)** *Per ogni coppia di vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ *vale la disuguaglianza*

$$|\mathbf{v} \times \mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \tag{4.7}$$

*Vale l'uguaglianza se e solo se i vettori* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono linearmente dipendenti.*

*Dimostrazione.* Siano fissati $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$. La disuguaglianza è vera se uno dei due vettori è nullo. Supponiamo quindi che siano entrambi non nulli; in particolare, $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{w} \times \mathbf{w} > 0$. Poiché $\times$ è definito positivo, la lunghezza del vettore $\mathbf{u} = \mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}$ è maggiore o uguale di 0. Svolgendo i conti, ricaviamo che

$$\begin{aligned}
0 \leq \mathbf{u} \times \mathbf{u} &= (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}) \times (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}) = \\
&= \mathbf{v} \times (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}) - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w} \times (\mathbf{v} - \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}) \\
&= \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}\right) - \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}\right) \times \mathbf{v} + \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}\right) \times \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}\right) \\
&= |\mathbf{v}|^2 - 2\mathbf{v} \times \left(\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}}\mathbf{w}\right) + (\frac{\mathbf{v} \times \mathbf{w}}{\mathbf{w} \times \mathbf{w}})^2(\mathbf{w} \times \mathbf{w})
\end{aligned}$$

$$= |\mathbf{v}|^2 - 2\left(\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{\mathbf{w}\times\mathbf{w}}\right)\mathbf{v}\times\mathbf{w} + \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{\mathbf{w}\times\mathbf{w}}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{\mathbf{w}\times\mathbf{w}}$$
$$= |\mathbf{v}|^2 - \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{|\mathbf{w}|^2}$$

Moltiplicando per $|\mathbf{w}|^2$, otteniamo che $0 \leq |\mathbf{v}|^2\ |\mathbf{w}|^2 - (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2$, cioè $(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2 \leq |\mathbf{v}|^2\ |\mathbf{w}|^2$, da cui si ricava la tesi. La dimostrazione nel caso dell'uguaglianza segue ricordando che due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se uno dei due è proporzionale all'altro e osservando che, se $\mathbf{v} = k\mathbf{w}$, allora $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = k(\mathbf{w}\times\mathbf{w})$. □

La disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ha varie conseguenze:

**Corollario 4.2.2. (Disuguaglianza triangolare)**

$$|\,|\mathbf{v}| - |\mathbf{w}|\,| \leq |\mathbf{v}+\mathbf{w}| \leq |\mathbf{v}| + |\mathbf{w}| \qquad \forall\, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}) \tag{4.8}$$

*Dimostrazione.* La disuguaglianza a destra si ricava osservando che entrambi i termini sono positivi, e quindi è equivalente provare che $|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 \leq (|\mathbf{v}|+|\mathbf{w}|)^2$. Svolgendo i calcoli, $|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2\mathbf{v}\times\mathbf{w} + |\mathbf{w}|^2$, mentre $(|\mathbf{v}|+|\mathbf{w}|)^2 = |\mathbf{v}|^2 + 2|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}| + |\mathbf{w}|^2$: la disuguaglianza cercata si ottiene quindi da quella di Cauchy-Schwartz. La disuguaglianza a destra nell'enunciato si dimostra in modo analogo. □

Ciò conclude la dimostrazione della proprietà (D3), cioè la disuguaglianza triangolare, della distanza. Ma la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz ha ulteriori applicazioni. Dati due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, per la disuguaglianza di Cauchy-Schwartz la quantità $\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$ verifica la disuguaglianza

$$-1 \leq \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|} \leq 1; \tag{4.9}$$

esiste pertanto un numero $\vartheta \in [0, \pi]$ tale che

$$\vartheta = arccos\ (\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}) \tag{4.10}$$

e questo numero si dice *misura principale dell'angolo formato dai vettori* $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si denota col simbolo $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$. Invece, ogni numero del tipo $\vartheta + 2k\pi$ , con $k \in \mathbb{Z}$, si dice una *misura dell'angolo formato da* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$, e con il simbolo $[\mathbf{v}\mathbf{w}]$ si denota l'insieme $\{\vartheta + 2k\pi k \in \mathbb{Z}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ di tutte le misure dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Le funzioni trigonometriche di $\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$ si dicono *funzioni trigonometriche dell'angolo* formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e si ha pertanto

$$cos\,\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \frac{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|} \tag{4.11}$$

$$sen\,\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}} = \sqrt{1 - cos^2\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}} = \sqrt{1 - \frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{|\mathbf{v}|^2\cdot|\mathbf{w}|^2}} = \tag{4.12}$$

$$= \sqrt{\frac{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w})}} = \frac{\sqrt{(\mathbf{v}\times\mathbf{v})(\mathbf{w}\times\mathbf{w}) - (\mathbf{v}\times\mathbf{w})^2}}{|\mathbf{v}|\cdot|\mathbf{w}|}$$

Osserviamo che, con tale definizione

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{vw}}).$$

Inoltre, applicando la bilinearità del prodotto scalare, otteniamo una estensione del Teorema del coseno (vedi (4.1.3))

$$||\mathbf{v}+\mathbf{w}||-||\mathbf{v}||-||\mathbf{w}|| = (\mathbf{v}+\mathbf{w})\times(\mathbf{v}+\mathbf{w})-\mathbf{v}\times\mathbf{v}-\mathbf{w}\times\mathbf{w} = 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{vw}}) = 2\,\mathbf{v}\times\mathbf{w}.$$

$$||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| = ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{w}|| - 2\,|\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,cos(\hat{\mathbf{vw}}).$$

Ricordiamo che due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se $\mathbf{v}\times\mathbf{w} = 0$, ossia se $cos\,\hat{\mathbf{vw}} = 0$.
Una base $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n$ di un sottospazio $\mathbf{W} \leq \mathbf{V}(\mathbb{E})$ è detta *ortogonale* se è formata da vettori a due a due ortogonali: $\mathbf{v}_i\times\mathbf{v}_j = 0$ per $i \neq j$. Ogni sottospazio $\mathbf{W}$ ammette (almeno) una base ortogonale: infatti, se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ è una qualsiasi base ordinata di $\mathbf{W}$, si ricava induttivamente una base ortogonale mediante il procedimento di Gram-Schmidt:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}_1 &= \mathbf{v}_1\\
\mathbf{u}_2 &= \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}_2}{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1\\
\mathbf{u}_3 &= \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}_3}{\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2\\
\mathbf{u}_4 &= \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}_4}{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}_4}{\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_3\times\mathbf{v}_4}{\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3\\
&\dots\\
\mathbf{u}_n &= \mathbf{v}_n - \frac{\mathbf{u}_1\times\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_1\times\mathbf{u}_1}\mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_2\times\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_2\times\mathbf{u}_2}\mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_3\times\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_3\times\mathbf{u}_3}\mathbf{u}_3 - \dots - \frac{\mathbf{u}_{n-1}\times\mathbf{v}_n}{\mathbf{u}_{n-1}\times\mathbf{u}_{n-1}}\mathbf{u}_{n-1}
\end{aligned}$$

## 4.3 Riferimenti cartesiani monometrici ortogonali.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo. Un riferimento cartesiano $\mathcal{R} = (O, R)$ di $\mathbb{E}$ si dice *monometrico ortogonale* se $R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ ortogonale rispetto a $\times$, cioè tale che $\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j = 0 \;\; i \neq j,\ i, j = 1, \dots, n$. Il riferimento $\mathcal{R}$ si dice invece *monometrico ortonormale* se $R = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ è un riferimento di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ ortonormale rispetto a $\times$, cioè tale che

$$\mathbf{v}_i \times \mathbf{v}_j = \delta_{ij} \tag{4.13}$$

per ogni coppia di indici $i, j = 1, \dots, n$, dove $\delta_{ij}$ è il simbolo di Kronecker, che vale 1 se $i = j$, vale 0 se $i \neq j$.

Se $\mathcal{R}$ è un riferimento monometrico ortonormale di $\mathbb{E}$ e se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono vettori di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, aventi componenti $(v_1, \dots, v_n)$ e $(w_1, \dots, w_n)$ rispettivamente in $R$, si ha

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = v_1 w_1 + \dots + v_n w_n \tag{4.14}$$

ossia il prodotto scalare $\mathbf{v} \times \mathbf{w}$ coincide col prodotto scalare euclideo dei vettori numerici delle componenti di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ in $R$ (cfr. [1], cap. 18, esempio 18.10 (a)). In particolare la lunghezza di un vettore $\mathbf{v}$ è data da

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + \dots + v_n^2} \tag{4.15}$$

e i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ risultano ortogonali se e solo se

$$v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n = 0 \tag{4.16}$$

Le funzioni trigonometriche di due vettori non nulli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono date da

$$cos\, \hat{\mathbf{vw}} = \frac{(v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)}{\sqrt{v_1^2 + \ldots + v_n^2} \cdot \sqrt{w_1^2 + \ldots + w_n^2}} \tag{4.17}$$
$$sen\, \hat{\mathbf{vw}} = \sqrt{\frac{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}}$$

Poichè, considerata la matrice

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} v_1 & \ldots & v_n \\ w_1 & \ldots & w_n \end{pmatrix} \tag{4.18}$$

si ha

$$|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t| = (v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2) - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2 = \Sigma_{i,j=1,\ldots,n}(v_i w_j - w_i v_j)^2$$

la formula del seno può anche essere scritta come

$$sen\, \hat{\mathbf{vw}} = \sqrt{\frac{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.19}$$

oppure come

$$sen\, \hat{\mathbf{vw}} = \sqrt{\Sigma_{i,j=1,\ldots,n} \frac{(v_i w_j - w_i v_j)^2}{(v_1^2 + \ldots + v_n^2)(w_1^2 + \ldots + w_n^2)}} \tag{4.20}$$

Infine, se $P$ e $Q$ sono punti di $\mathbb{E}$ aventi in $\mathcal{R}$ coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$ e $(q_1, \ldots, q_n)$ rispettivamente, si ha

$$d(P, Q) = |P - Q| = \sqrt{(p_1 - q_1)^2 + \ldots + (p_n - q_n)^2} \tag{4.21}$$

In particolare, se $\mathbb{E}$ ha dimensione 1 e $P$ e $Q$ hanno coordinate $p$ e $q$ rispettivamente, allora

$$d(P, Q) = |p - q| \,. \tag{4.22}$$

## 4.4 Ortogonalità.

Sia $\mathbb{S}$ un sottospazio affine dello spazio euclideo $\mathbb{E}$. Su $\mathbb{S}$ resta indotta in modo naturale una struttura di spazio euclideo, mediante la restrizione a $\mathbf{V}(\mathbb{S})$ del prodotto scalare fissato su $\mathbf{V}(\mathbb{E})$, e tale restrizione è definita positiva. Un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ si dice *ortogonale* o *perpendicolare* a $\mathbb{S}$, e si scrive $\mathbf{v} \perp \mathbb{S}$ oppure $\mathbb{S} \perp \mathbf{v}$, se $\mathbf{v}$ è ortogonale (rispetto al prodotto scalare $\times$) ad ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}$, cioè ad ogni vettore della giacitura $\mathbf{V}(\mathbb{S})$ di $S$:

$$\mathbf{v} \perp \mathbb{S} \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{S}) \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \tag{4.23}$$

Siano $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ sottospazi affini di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$. Si dice che $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ sono *ortogonali* o *perpendicolari*, e si scrive $\mathbb{S} \perp \mathbb{S}'$, se ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}$ è ortogonale ad ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}'$:

$$\mathbb{S} \perp \mathbb{S}' \Leftrightarrow \text{ per ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{S}) \text{ e per ogni } \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{S}') \text{ si ha } \mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0. \qquad (4.24)$$

Si noti che $\mathbb{S} \perp \mathbb{S}'$ se e solo se ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}$ è ortogonale a $\mathbb{S}'$, ovvero se ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}'$ è ortogonale a $\mathbb{S}$. Notiamo pure che, in base alla definizione che abbiamo dato, i punti sono gli unici sottospazi ortogonali ad ogni altro sottospazio.

**Proposizione 4.4.1.** *Sia $\mathbb{S}$ un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione $m$. Un sottospazio $\mathbb{S}'$ ortogonale a $\mathbb{S}$ ha dimensione al più uguale a $n-m$. Esistono sottospazi ortogonali a $\mathbb{S}$ di ogni dimensione $d = 0, \ldots, n-m$. I sottospazi $\mathbb{S}'$ di dimensione $n-m$ ortogonali a $\mathbb{S}$ sono tra loro paralleli e ciascuno di essi interseca $\mathbb{S}$ in uno e un solo punto.*

*Dimostrazione.* Sia $\mathbb{S} = P + \mathbf{W}$. Un sottospazio $\mathbb{S}' = Q + \mathbf{W}'$ è ortogonale a $\mathbb{S}$ se e solo se $\mathbf{W} \subseteq \mathbf{W}'^{\perp}$, o, equivalentemente, $\mathbf{W}' \subseteq \mathbf{W}^{\perp}$ (cfr. [1], cap. 19, par. 1). Da ciò segue immediatamente la limitazione sulla dimensione di $\mathbb{S}'$.

In particolare, i sottospazi $\mathbb{S}'$ di dimensione $n-m$ e ortogonali a $\mathbb{S}$ hanno giacitura $\mathbf{W}^{\perp}$, e sono paralleli tra loro. Inoltre, lo spazio dei vettori si decompone in somma diretta ortogonale come $\mathbf{V}(\mathbb{A}) = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^{\perp}$; se $\mathbb{S}' = Q + \mathbf{W}^{\perp}$, il vettore $\mathbf{PQ}$ si decompone in modo unico come $\mathbf{PQ} = \mathbf{v} + \mathbf{w}$ con $\mathbf{v} \in \mathbf{W}$ e $\mathbf{w} \in \mathbf{W}^{\perp}$, sicché $P + \mathbf{v} = Q - \mathbf{w}$ è l'unico punto di $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}'$. □

**Corollario 4.4.2.** *Sia $\mathbb{S}$ un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione $m$ e sia $Q$ un punto di $\mathbb{E}$. Esiste uno e un solo sottospazio $\mathbb{S}'$ di dimensione $n-m$ ortogonale a $\mathbb{S}$ e passante per $Q$.*

*Dimostrazione.* Se $\mathbb{S} = P + \mathbf{W}$ allora $\mathbb{S}' = Q + \mathbf{W}^{\perp}$. □

**Corollario 4.4.3.** *Sia $\mathbb{S}$ un sottospazio di $\mathbb{E}$ di dimensione $m$. Il sottospazio $\mathbb{S}$ è individuato da un suo qualunque punto e da $n-m$ vettori ortogonali a $\mathbb{S}$ e linearmente indipendenti. In particolare un iperpiano è individuato da un suo qualsiasi punto e da un vettore non nullo ortogonale all'iperpiano.*

*Dimostrazione.* Sia $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}]$ un sistema linearmente indipendente (massimale) di vettori ortogonali a $\mathbb{S}$. Se $\mathbf{W}$ è la giacitura di $\mathbb{S}$, il sottospazio ortogonale $\mathbf{W}^{\perp}$ è generato da $[\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m}]$, sicché $\mathbf{W} =< \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_{n-m} >^{\perp}$. Di qui segue l'asserto. □

Supponiamo ora introdotto in $\mathbb{E}$ un riferimento monometrico ortonormale $\mathcal{R}$. Ogni iperpiano $\alpha$ ammette una equazione della forma

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + c = 0$$

Il vettore $\mathbf{n}$ di componenti $(a_1, \ldots, a_n)$ in $\mathcal{R}$ è ortogonale a $\alpha$ e genera la giacitura ortogonale a $\alpha$: esso viene anche detto *vettore normale* ad $\alpha$ ed è vettore direttore per qualsiasi retta ortogonale a $\alpha$. Se $Q(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{S}$, un punto $P(x_1, \ldots, x_n)$ appartiene a $\alpha$ se e solo se

$$\mathbf{QP} \times \mathbf{n} = a_1 (x_1 - q_1) + \ldots + a_n (x_n - q_n) = 0.$$

Più in generale, siano $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ sottospazi di $\mathbb{E}$. Supponiamo che $\mathbb{S}$ abbia dimensione $m$ e abbia in $\mathcal{R}$ un sistema normale $\mathcal{A}$ di equazioni del tipo

$$\mathcal{A} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + c_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n + c_{n-m} = 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

**Proposizione 4.4.4.** *Il sottospazio $\mathbb{S}'$ è perpendicolare a $\mathbb{S}$ se e solo se per ogni vettore $\mathbf{v}$ parallelo a $\mathbb{S}'$, le componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ di $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}$ soddisfano la relazione*

$$rg \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n-m,1} & \ldots & a_{n-m,m} \\ v_1 & \ldots & v_n \end{pmatrix} = n - m. \tag{4.26}$$

*Dimostrazione.* Nel riferimento $\mathcal{R}$, la giacitura $\mathbf{W}$ di $\mathbb{S}$ ha come sistema di equazioni il sistema omogeneo $\mathcal{A}^{om}$ associato ad $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}^{om} : \begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0 \\ \ldots \\ a_{n-m,1}x_1 + \ldots + a_{n-m,n}x_n = 0 \end{cases} , \tag{4.27}$$

cioè un vettore di componenti $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ in $\mathcal{R}$ appartiene a $\mathbf{W}$ se e solo se $\xi$ è una soluzione di $\mathcal{A}^{om}$. Sia ora $\mathbf{v}$ un vettore della giacitura $\mathbf{W}'$ di $\mathbb{S}'$ e ne siano $(v_1, \ldots, v_n)$ le componenti in $\mathcal{R}$. Se $\mathbb{S}$ è perpendicolare a $\mathbb{S}'$ allora ogni vettore di $\mathbf{W}$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbf{W}'$, e quindi per ogni soluzione $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ di $\mathcal{A}^{om}$ si ha $v_1\xi_1 + \ldots + v_n\xi_n = 0$, ossia $\xi$ è pure una soluzione dell'equazione

$$v_1x_1 + \ldots + v_nx_n = 0 \tag{4.28}$$

Ciò comporta che quest'ultima equazione (4.28) dipenda da $\mathcal{A}^{om}$, ossia che valga la (4.26). Viceversa se vale la (4.26) per ogni vettore $\mathbf{v}$ di $\mathbf{W}$, l'equazione (4.28) dipende dal sistema $\mathcal{A}^{om}$, e quindi ne ha tutte le soluzioni. Ciò implica che ogni vettore di $\mathbf{W}$ è ortogonale ad ogni vettore di $\mathbf{W}'$, cioè $\mathbb{S}$ è ortogonale a $\mathbb{S}'$. □

**Corollario 4.4.5.** *(a) Se $\mathbb{S}'$ è una retta e $\mathbb{S}$ è un iperpiano avente in $\mathcal{R}$ equazione*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \tag{4.29}$$

*allora $\mathbb{S}$ è perpendicolare a $\mathbb{S}'$ se e solo se una $n$-pla di numeri direttori di $\mathbb{S}'$ in $\mathcal{R}$ è data da $(a_1, \ldots, a_n)$.*
*(b) Se $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ sono due rette di numeri direttori $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ in $\mathcal{R}$, allora $\mathbb{S}$ è perpendicolare a $\mathbb{S}'$ se e solo se*

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0 \tag{4.30}$$

*Se poi, nel riferimento $\mathcal{R}$, la retta $\mathbb{S}$ ha equazioni*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n + a_1 = 0 \\ \ldots \\ a_{n-1,1}x_1 + \ldots + a_{n-1,n}x_n + a_{n-1} = 0 \end{cases} \tag{4.31}$$

*e la retta* $\mathbb{S}'$ *ha numeri direttori* $(b_1, \ldots, b_n)$*, allora* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{S}'$ *sono perpendicolari se e solo se*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ & \ldots & \\ a_{n-1,1} & \ldots & a_{n-1,n} \\ b_1 & \ldots & b_n \end{vmatrix} = 0 \tag{4.32}$$

*Dimostrazione.* Ovvia conseguenza della proposizione (4.4.4). □

*Esempio 4.4.6.* Sia $\mathbb{E}$ un piano euclideo e ne sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortonormale. Due rette $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ aventi in $\mathcal{R}$ equazioni

$$ax + by + c = 0, \qquad a'x + b'y + c' = 0 \tag{4.33}$$

sono ortogonali se e solo se si ha

$$aa' + bb' = 0 \tag{4.34}$$

Infatti una coppia di numeri direttori di $\mathbb{S}$ [risp. di $\mathbb{S}'$] è data da $(-b, a)$ [risp. $(-b', a')$]. Quindi la condizione di ortogonalità è

$$(-b)(-b') + aa' = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad aa' + bb' = 0 \tag{4.35}$$

## 4.5 Orientazioni, questioni angolari e distanze.

Nel precedente paragrafo si è discussa la nozione di ortogonalità tra sottostai. In alcuni casi, sarà possibile fornire anche una nozione di angolo tra sottospazi.

**a) Orientazioni.**

Ricordiamo che (cfr. [1], cap. 14, par. 7) una *orientazione* in uno spazio vettoriale di dimensione finita è una classe di equivalenza di riferimenti, ove due riferimenti siano detti equivalenti (o *concordi*) se la matrice del cambio di riferimento ha determinante positivo. Due riferimenti non equivalenti sono detti *discordi*. Poichè esistono due sole distinte orientazioni su ogni spazio vettoriale $\mathbf{V}$ non nullo di dimensione finita su $\mathbb{R}$, esistono quindi due distinte orientazioni su ogni spazio affine reale di dimensione finita, che non sia un punto, secondo la definizione seguente.

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine di dimensione finita $n$ su $\mathbb{R}$.

**Definizione 4.5.1.** Si dice che è data una *orientazione in* $\mathbb{E}$ se è data una orientazione sullo spazio vettoriale $\mathbf{V}(\mathbb{E})$.

*Esempio 4.5.2.* **Orientazioni su una retta**. Per assegnare una orientazione su una retta basta dare un vettore $\mathbf{v}$ non nullo parallelo alla retta, perché questo è un riferimento della giacitura, e quindi determina una classe di riferimenti concordi.

Un vettore $\mathbf{w}$ parallelo alla retta e non nullo determina la stessa orientazione di $\mathbf{v}$ se e solo se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$, con $\lambda > 0$: si dice allora che $\mathbf{w}$ è *concorde alla orientazione* della retta.

Ovviamente $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ determinano orientazioni opposte se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{w}$ con $\lambda < 0$. In particolare in uno spazio euclideo vi sono solo due versori paralleli alla retta, uno opposto dell'altro: essi individuano le due orientazioni opposte della retta.

**Definizione 4.5.3.** Se $\varphi$ è una affinità di $\mathbb{E}$ in sè si dice che $\varphi$ *conserva l'orientazione* se l'applicazione lineare associata $\varphi_l$ conserva l'orientazione di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$.

Ciò accade se e solo se, data l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.36}$$

di $\varphi$ in un fissato riferimento $\mathcal{R}$ di $\mathbb{A}$, la matrice quadrata $\mathbf{A}$ d'ordine $n$ che compare in essa ha determinante positivo (cfr. [1], cap. 14, par. 7, prop. 14.34).

**Definizione 4.5.4.** Le affinità di $\mathbb{E}$ in sè che conservano l'orientazione costituiscono un sottogruppo del gruppo affine, che denoteremo col simbolo

$$\mathrm{Aff}^+(\mathbb{E})$$

e chiameremo *affinità dirette*.

**b) Angolo tra due rette orientate.**
Siano $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ e $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n))$ un riferimento cartesiano monometrico ortonormale in $\mathbb{E}$. Data una retta $\mathbb{S}$ di $\mathbb{E}$, sia fissata una orientazione di $\mathbb{S}$ mediante la scelta di un versore $\mathbf{v}$ parallelo a $\mathbb{S}$.

**Definizione 4.5.5.** Le componenti $(v_1, \ldots, v_n)$ del versore $\mathbf{v}$ in $\mathcal{R}$ , si dicono *coseni direttori della retta* $\mathbb{S}$.

Il motivo di tale denominazione risiede nel fatto che $v_i$ è il coseno dell'angolo formato da $\mathbf{v}$ con il versore $\mathbf{e}_i$.

**Definizione 4.5.6.** Date due rette orientate $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$, si dice *angolo formato dalle due rette* l'angolo formato dai due versori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ paralleli e concordi a $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$. Tale angolo si denota col simbolo

$$\widehat{\mathbb{S}\mathbb{S}'}$$

e dipende dalle orientazioni scelte su $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$.

E' facile verificare che, se si cambia l'orientazione su entrambe le rette, l'angolo rimane lo stesso, mentre l'angolo cambia di $\pi$ se si cambia l'orientazione su una sola delle due rette.

*Osservazione 4.5.7.* Se $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ hanno coseni direttori $(v_1, \ldots, v_n)$ e $(w_1, \ldots, w_n)$ rispettivamente, si ha

$$\begin{aligned} cos\,\widehat{\mathbb{S}\mathbb{S}'} &= v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n \\ sen\,\widehat{\mathbb{S}\mathbb{S}'} &= \sqrt{1 - (v_1 w_1 + \ldots + v_n w_n)^2}\,. \end{aligned} \tag{4.37}$$

**c) Angolo tra iperpiani e tra rette e iperpiani.**
Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione $n$ e $\mathcal{R}$ sia un riferimento cartesiano monometrico ortogonale in $\mathbb{E}$. Siano $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ iperpiani di $\mathbb{E}$ e siano assegnati un vettore non nullo $\mathbf{v}$ ortogonale a $\mathbb{S}$ e uno non nullo $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbb{S}'$. Notiamo che tanto $\mathbf{v}$ che $\mathbf{w}$ sono definiti solo a meno del segno.

**Definizione 4.5.8. Angolo tra iperpiani** Si definisce *angolo tra i due iperpiani* $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ l'angolo formato da $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, che è definito solo a meno di multipli di $\pi$.

L'angolo tra iperpiani è dunque l'angolo tra le rispettive normali. Come eccezione rispetto alla nozione già introdotta di ortogonalità tra sottospazi di uno spazio euclideo, la nozione introdotta di 'angolo' tra iperpiani permette di introdurre anche la nozione di ortogonalià tra iperpiani, secondo la definizione seguente.

**Definizione 4.5.9.** Due iperpiani $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ si dicono *ortogonali* se l'angolo da essi formato vale $\pi/2$.

*Osservazione 4.5.10.* Se $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ hanno, rispettivamente, equazioni

$$\begin{aligned} a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0, \\ b_1x_1 + \ldots + b_nx_n + b = 0 \end{aligned} \tag{4.38}$$

la condizione di ortogonalità tra $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ è data da

$$a_1b_1 + \ldots + a_nb_n = 0 \tag{4.39}$$

mentre il coseno dell'angolo tra $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ è dato da

$$cos\,\hat{\mathbb{S}\mathbb{S}'} = \frac{a_1b_1 + \ldots + a_nb_n}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2}} \tag{4.40}$$

Infatti $(a_1, \ldots, a_n)$ e $(b_1, \ldots, b_n)$ sono le componenti di vettori ortogonali rispettivamente a $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$.

**Definizione 4.5.11. Angolo retta-iperpiano** Se $\mathbb{S}$ è un iperpiano e $\mathbb{S}'$ è invece una retta, l'angolo tra $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$, sempre definito a meno di multipli di $\pi$, si definisce come il complementare a $\pi/2$ dell'angolo convesso di $\mathbb{S}'$ con un vettore non nullo ortogonale a $\mathbb{S}$.

**d) Proiezione parallela di un vettore lungo una direzione.** Sia $\mathbf{w}$ un vettore e sia $\mathbb{S} = Q+ < \mathbf{v} >$ una retta. Il vettore

$$\mathbf{w}_{\mathbb{S}} = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{v} \tag{4.41}$$

è parallelo a $\mathbb{S}$ viene detto *proiezione parallela* di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{v}$ o lungo $\mathbb{S}$. Il vettore $\mathbf{w}_{\mathbb{S}}$ gode della proprietà che

$$\mathbf{w}_{\perp} = \mathbf{w} - \mathbf{w}_{\mathbb{S}} = \mathbf{w} - \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}\,\mathbf{v} \tag{4.42}$$

è ortogonale a $\mathbb{S}$, ed è chiamato *proiezione ortogonale* di $\mathbf{w}$ lungo $\mathbf{v}$ o lungo $\mathbb{S}$. Il vettore $\mathbf{w}_{\mathbb{S}}$ è l'unico vettore parallelo ad $\mathbb{S}$ con tale proprietà. Infatti, ogni vettore parallelo a $\mathbb{S}$ è della forma $k\mathbf{v}$; la condizione che $\mathbf{w} - k\mathbf{v}$ sia ortogonale a $\mathbf{v}$ comporta che $0 = \mathbf{v} \times [\mathbf{w} - k\mathbf{v}] = \mathbf{v} \times \mathbf{w} - k\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ e dunque $k = \frac{\mathbf{w} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$.

Si ricava la decomposizione ortogonale

$$\mathbf{w} = \mathbf{w}_{\mathbb{S}} + \mathbf{w}_{\perp}. \tag{4.43}$$

**e) Distanza di un punto da un sottospazio.**

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione $n$, dotato di un riferimento cartesiano monometrico ortonormale $\mathcal{R}$. Siano $\mathbb{S}$ un sottospazio di dimensione $m < n$ e $P$ un punto di $\mathbb{E}$. Esiste un unico sottospazio $\mathbb{S}'$ di dimensione $n - m$ di $\mathbb{E}$ ortogonale a $\mathbb{S}$

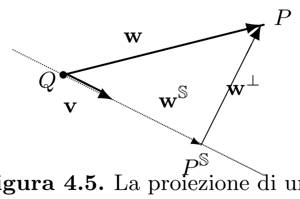


**Figura 4.5.** La proiezione di un vettore

e passante per $P$. Sia $P^{\mathbb{S}}$ l'unico punto di intersezione di $\mathbb{S}'$ con $\mathbb{S}$ (cfr. proposizione 4.4.1): tale punto è detto *proiezione ortogonale* di $P$ su $\mathbb{S}$ ed è l'unico punto di $\mathbb{S}$ tale che $\mathbf{PP}^{\mathbb{S}}$ sia ortogonale a $\mathbb{S}$.

La distanza $d(P, P^{\mathbb{S}})$ prende il nome di *distanza* di $P$ da $\mathbb{S}$ e si denota col simbolo $d(P, \mathbb{S})$. Tale definizione è giustificata dal fatto che la proiezione ortogonale $P^{\mathbb{S}}$ è il punto di $\mathbb{S}$ di minima distanza da $P$.

**Proposizione 4.5.12.** *Per ogni punto $X \neq P^{\mathbb{S}}$ in $\mathbb{S}$, si ha $d(X, P) > d(P, \mathbb{S})$.*

*Dimostrazione.* Sia ha $\mathbf{PX} = \mathbf{P}^{\mathbb{S}}\mathbf{X} + \mathbf{PP}^{\mathbb{S}}$. Allora

$$\begin{aligned} d(X,P)^2 &= \mathbf{PX} \times \mathbf{PX} = \\ &= \mathbf{P}^{\mathbb{S}}\mathbf{X} \times \mathbf{P}^{\mathbb{S}}\mathbf{X} + 2\,\mathbf{P}^{\mathbb{S}}\mathbf{X} \times \mathbf{PP}^{\mathbb{S}} + \mathbf{PP}^{\mathbb{S}} \times \mathbf{PP}^{\mathbb{S}} = \\ &= d(X, P^{\mathbb{S}})^2 + d(P, P^{\mathbb{S}})^2 > d(P, \mathbb{S})^2 \end{aligned}$$

in quanto $\mathbf{P}^{\mathbb{S}}\mathbf{X} \times \mathbf{PP}^{\mathbb{S}} = 0$ perché $\mathbf{PP}^{\mathbb{S}}$ è ortogonale a $\mathbb{S}$, $d(X, P^{\mathbb{S}}) > 0$ perché $X \neq P^{\mathbb{S}}$, e $d(P, P^{\mathbb{S}}) = d(P, \mathbb{S})$ per definizione. □

Calcoleremo ora $d(P, \mathbb{S})$ in due casi particolari, quando $\mathbb{S}$ è un iperpiano oppure una retta.

*Esempio 4.5.13.* **Distanza di un punto da un iperpiano**.

**Proposizione 4.5.14.** *Sia*

$$a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a = 0 \tag{4.44}$$

*un'equazione di un iperpiano $\mathbb{S}$ in $\mathcal{R}$ e sia $P$ il punto di coordinate cartesiane $(p_1, \ldots, p_n)$. Allora*

$$d(P, S) = \frac{|a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}}. \tag{4.45}$$

*Dimostrazione.* Le equazioni parametriche della retta $\mathbb{S}'$ ortogonale a $\mathbb{S}$ per il punto $P$ sono date da

$$x_i = p_i + ta_i, \qquad i = 1, \ldots, n, \quad t \in \mathbf{R} \tag{4.46}$$

Le coordinate $(p'_1, \ldots, p'_n)$ della proiezione ortogonale $P^S = S \cap S'$ corrispondono al valore $t_0$ del parametro $t$ che sia radice dell'equazione

$$\begin{aligned} & a_1(p_1 + ta_1) + \ldots + a_n(p_n + ta_n) + a = 0 \quad \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \quad & (a_1p_1 + \ldots + a_np_n + a) + t(a_1^2 + \ldots + a_n^2) = 0 \end{aligned} \tag{4.47}$$

ossia a

$$t_0 = -\frac{a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a}{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \tag{4.48}$$

Quindi

$$\begin{aligned} d(P, \mathbb{S}) = d(P, P^{\mathbb{S}}) &= \sqrt{(p_1 - p_1')^2 + \ldots + (p_n - p_n')^2} \\ &= \sqrt{(t_0 a_1)^2 + \ldots + (t_0 a_n)^2} = |t_0| \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2} \\ &= \frac{|a_1 p_1 + \ldots + a_n p_n + a|}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}} \end{aligned} \tag{4.49}$$

□

*Esempio 4.5.15.* **Distanza di un punto da una retta.** Un altro caso interessante è quello della distanza tra un punto $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ e una retta $\mathbb{S}$. Supponiamo $\mathbb{S}$ passi per il punto $Q(q_1, q_2, \ldots, q_n)$ ed abbia vettore direttore $\mathbf{v}(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$; le equazioni parametriche di $\mathbb{S}$ sono quindi

$$x_1 = q_1 + \lambda_1 t,\ x_2 = q_2 + \lambda_2 t, \ldots,\ x_n = q_n + \lambda_n t \tag{4.50}$$

Il punto $P^{\mathbb{S}}$ è il punto su $\mathbb{S}$ tale che $\mathbf{QP}^{\mathbb{S}}$ coincide con la proiezione parallela di $\mathbf{QP}$ lungo $\mathbf{v}$. Le coordinate $P^{\mathbb{S}}(h_1, h_2, \ldots, h_n)$ si ottengono dalle equazioni parametriche di $\mathbb{S}$ per $t_0 = \frac{\mathbf{QP} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}$:

$$h_1 = q_1 + \lambda_1 \frac{\mathbf{QP} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}},\ h_2 = q_2 + \lambda_2 \frac{\mathbf{QP} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}}, \ldots,\ h_n = q_n + \lambda_n \frac{\mathbf{QP} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \tag{4.51}$$

mentre la distanza tra $P$ e $\mathbb{S}$ è la lunghezza della proiezione ortogonale

$$\mathbf{PP}^{\mathbb{S}} = (\mathbf{QP})_\perp = \mathbf{QP} - \mathbf{QP}^{\mathbb{S}} = \mathbf{QP} - \frac{\mathbf{QP} \times \mathbf{v}}{\mathbf{v} \times \mathbf{v}} \mathbf{v}.$$

Un altro modo per ottenere tale risultato è quello di considerare l'iperpiano $\mathbb{S}'$ per $P(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ ortogonale ad $\mathbb{S}$, che ha equazione

$$\lambda_1(x_1 - p_1) + \lambda_2(x_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(x_n - p_n) = 0\,. \tag{4.52}$$

Le coordinate di $P^{\mathbb{S}} = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}'$ si ottengono per $t = t_0$ soluzione dell'equazione

$$\begin{aligned} \lambda_1(q_1 + \lambda_1 t - p_1) + \lambda_2(q_2 + \lambda_2 t - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n + \lambda_n t - p_n) = 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2)t + \lambda_1(q_1 - p_1) + \lambda_2(q_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n - p_n) = 0 \end{aligned}$$

ossia per

$$t_0 = -\frac{\lambda_1(q_1 - p_1) + \lambda_2(q_2 - p_2) + \ldots + \lambda_n(q_n - p_n)}{\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \ldots + \lambda_n^2}\ . \tag{4.53}$$

Dunque ritroviamo la formula

$$\begin{aligned} d(P, \mathbb{S}) \ =\ & d(P, P^{\mathbb{S}}) = \left\{[q_1 - p_1 + t_0\lambda_1]^2 + [q_2 - p_2 + t_0\lambda_2]^2 + \ldots \right. \\ & \ldots + [q_n - p_n + t_0\lambda_n]^2 \end{aligned}$$

*Esempio numerico:* $P(3, 2, 1)$ ed $\mathbb{S}$ ha equazioni parametriche

$$x = 2 + t,\ y = -4 + 3t,\ z = 1 - t\ .$$

Posti $Q(2, -4, 1)$ e $\mathbf{v}(1, 3, -1)$, la proiezione parallela lungo $\mathbb{S}$ di $\mathbf{QP}(1, 6, 0)$ è data da $\frac{1+18}{1+9+1}(1, 3, -1) = \frac{19}{11}(1, 3, -1)$, e quindi

$$P^{\mathbb{S}}(2 + \frac{19}{11}, -4 + \frac{19}{11}3, 1 - \frac{19}{11}) = P^{\mathbb{S}}(\frac{41}{11}, -\frac{25}{11}, -\frac{8}{11}).$$

Si ricava la distanza cercata

$$d(P, \mathbb{S}) = d(P, P^{\mathbb{S}}) = \sqrt{\left(3 - \frac{41}{11}\right)^2 + \left(2 + \frac{25}{11}\right)^2 + \left(1 + \frac{8}{11}\right)^2}.$$

Analogo risultato si sarebbe trovato considerando il piano $\mathbb{S}'$ per $P$ ortogonale ad $\mathbb{S}$, che ha equazione

$$(x - 3) + 3(y - 2) - (z - 1) = x + 3y - z - 8 = 0$$

Le coordinate di $P^{\mathbb{S}} = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}'$ si ottengono per $t$ soluzione della equazione

$$(2 + t) + 3(-4 + 3t) - (1 - t) - 8 = 11\,t - 19 = 0,$$

ossia per $t_0 = 19/11$.

**f) Distanza tra sottospazi**
Più in generale, la distanza $d(\mathbb{S}, \mathbb{S}')$ tra due sottospazi $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ è la minima distanza tra un punto di $\mathbb{S}$ e un punto di $\mathbb{S}'$, quando tale minimo esiste. In particolare, se $\mathbb{S} \cap \mathbb{S}' \neq \emptyset$, allora $d(\mathbb{S}, \mathbb{S}') = 0$. Inoltre, se $P \in \mathbb{S}$ e $P' \in \mathbb{S}'$ sono punti di minima distanza, la retta per $P$ e $P'$ è ortogonale sia a $\mathbb{S}$ che a $\mathbb{S}'$.

## 4.6 Lo spazio euclideo di dimensione 3 e il prodotto vettoriale

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo di dimensione 3, e sia $\mathcal{R} = (O; \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ un riferimento monometrico ortonormale. Nello spazio $\mathbb{E}$ verrà considerata l'orientazione indotta dal riferimento fissato.

Assegnati due vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ di $\mathbb{E}$, si vuole associare loro un terzo vettore, detto *prodotto esterno* (o *vettoriale*) di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ e denotato con $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$, con le seguenti proprietà:

a) $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = \mathbf{0}$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti;
b) se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti:

- il vettore $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è ortogonale sia a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$, cioè $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \perp \mathbf{v}$ e $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \perp \mathbf{w}$;
- la lunghezza di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, cioè $|(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w})| = |\mathbf{v}|\,|\mathbf{w}|\,sin\hat{\mathbf{v}\mathbf{w}}$;
- il riferimento $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{w})$ è equiorientato a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$.

La definizione di prodotto esterno dipende quindi dall'orientazione scelta, a meno del segno.

Le componenti di $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ possono facilmente essere individuate a partire dalle componenti $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$ e $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$, pensando che $\mathbf{v}\wedge\mathbf{w}$ si ricava come determinante formale della matrice:

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = (v_2 w_3 - v_3 w_2)\,\mathbf{i} - (v_1 w_3 - v_3 w_1)\,\mathbf{j} + (v_1 w_2 - v_2 w_1)\,\mathbf{k}$$

Infatti, detto $\mathbf{u}$ il vettore così definito, notiamo che $\mathbf{u}$ è sicuramente ortogonale a $\mathbf{v}$ e a $\mathbf{w}$, e si annulla se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente dipendenti. Inoltre, se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti, il riferimento $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ è equiorientato a $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, perchè la matrice dell'identità su $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ (rispetto al riferimento $(\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u})$ nel dominio e $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ nel codominio) è

$$\begin{pmatrix} v_1 & w_1 & (v_2 w_3 - v_3 w_2) \\ v_2 & w_2 & -(v_1 w_3 - v_3 w_1) \\ v_3 & w_3 & (v_1 w_2 - v_2 w_1) \end{pmatrix}$$

Sviluppando il determinante secondo Laplace rispetto alla ultima colonna, si vede che il determinante di tale matrice è la norma del vettore non nullo $u$ (e dunque è positivo). Deduciamo che tale matrice individua una affinità diretta. Infine, la lunghezza di $\mathbf{u}$ è corretta, come si vede applicando la formula (4.20) e ricordando che il riferimento è ortonormale.

L'applicazione $\mathbf{V}(\mathbb{E}) \times \mathbf{V}(\mathbb{E}) \to \mathbf{V}(\mathbb{E})$ definita da $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \mapsto \mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è bilineare alternante, cioè:

- $(k\mathbf{v} + h\mathbf{v}') \wedge \mathbf{w} = k\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} + h\mathbf{v}' \wedge \mathbf{w}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{v}', \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$, $k, h \in \mathbb{R}$;
- $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = -\mathbf{w} \wedge \mathbf{v}$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$.

*Esempio 4.6.1.* L'area del triangolo di vertici $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ si ottiene considerando i vettori

$$\mathbf{v} = \mathbf{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \qquad \mathbf{w} = \mathbf{AC}(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3).$$

Poichè la lunghezza di $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}$ è uguale all'area del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$, e l'area del triangolo di vertici $A$, $B$, $C$ ne è la metà:

$$Area\,triangolo = \frac{1}{2}|\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}|$$

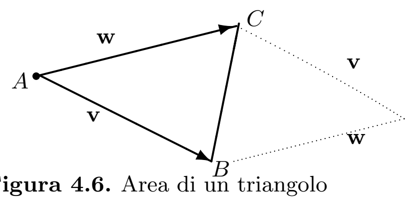


**Figura 4.6.** Area di un triangolo

**Definizione 4.6.2.** Dati tre vettori $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$, si definisce loro *prodotto misto* il numero reale $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u}$.

Nel riferimento ortonormale, il prodotto misto di $\mathbf{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\mathbf{w}(w_1, w_2, w_3)$ e $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$ si ricava come determinante della matrice:

$$(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u} = det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \end{pmatrix},$$

come si vede sviluppando il determinante rispetto all'ultima riga. In particolare, il prodotto misto $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u}$ è nullo se e solo se i vettori $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $\mathbf{u}$ sono complanari (cioè linearmente dipendenti). Più in generale, il valore assoluto del prodotto misto di $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$ è il *volume* del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$. Il prodotto misto può essere interpretato come volume con segno del parallelepipedo.

*Esempio 4.6.3.* Sia $\mathcal{P}$ la *piramide* (o tetraedro) di vertici $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$, $D(d_1, d_2, d_3)$. Il volume di $\mathcal{P}$ si ottiene considerando i vettori

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \mathbf{AB}(b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \\ \mathbf{w} &= \mathbf{AC}(c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3), \\ \mathbf{u} &= \mathbf{AD}(d_1 - a_1, d_2 - a_2, d_3 - a_3). \end{aligned}$$

Il volume di $\mathcal{P}$ è pari ad un terzo del volume del prisma di base e altezza uguale a quelle della piramide. In particolare, il volume della piramide è un sesto del volume del parallelepipedo di lati $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$, e il volume di tale parallelepipedo è dato dal valore assoluto del prodotto misto di $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ e $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} Area\, piramide\, \mathcal{P} = \frac{1}{6}|(\mathbf{v} \wedge \mathbf{w}) \times \mathbf{u}| &= \frac{1}{6}|det \begin{pmatrix} b_1 - a_1 & b_2 - a_2 & b_3 - a_3 \\ c_1 - a_1 & c_2 - a_2 & c_3 - a_3 \\ d_1 - a_1 & d_2 - a_2 & d_3 - a_3 \end{pmatrix}| \\ &= \frac{1}{6}|det \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 & 1 \\ c_1 & c_2 & c_3 & 1 \\ d_1 & d_2 & d_3 & 1 \end{pmatrix}| \end{aligned}$$

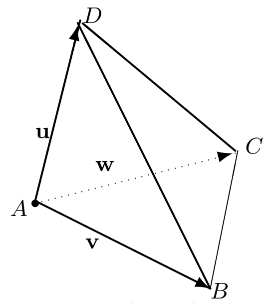


**Figura 4.7.** Volume di una piramide

Il prodotto vettoriale può essere utilizzato anche per calcolare la distanza tra due rette parallele o tra due rette sghembe.

# Esercizi svolti

## IL PRODOTTO SCALARE

**Problema 4.1.** *a) Dimostra che* $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \times (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2$.
*b) Dimostra che* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$.

*Soluzione.* a) Per la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \times (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

b) Si sfruttano la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare.

**Problema 4.2.** *I vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ *di lunghezza* $|\mathbf{v}| = 4$*,* $|\mathbf{w}| = 5$*,* $|\mathbf{u}| = 3$ *rispettivamente, soddisfano alla condizione* $\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{u} = 0$*. Determina* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$*.*

*Soluzione.* Dalla relazione di dipendenza lineare si ricava che $\mathbf{w} = -\mathbf{v} - \mathbf{u}$ e

$$\begin{aligned} 25 = \mathbf{w} \times \mathbf{w} &= (-\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (-\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \times \mathbf{u} \\ &= 16 + 9 + 2\mathbf{v} \times \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Si ricava che $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0$ e che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono tra loro ortogonali. Dunque,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v} + \mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= -\mathbf{w} \times \mathbf{w} = -25. \end{aligned}$$

**Problema 4.3.** *Determina i versori ortogonali a* $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3k$*.*

**Problema 4.4.** *Dimostra che un quadrilatero piano è un rettangolo se e solo se le diagonali hanno uguale lunghezza.*

*Soluzione.* Ricorda la relazione $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$ mostrata nel'Esercizio svolto probtipo:4.aa1, e osserva che $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono le diagonali del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Imponendo l'uguaglianza delle diagonali, si ricava che $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$, cioè che due lati consecutivi sono ortogonali e il parallelogramma è un rettangolo. Viceversa, lo stesso ragionamento mostra che la condizione di ortogonalià $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ implica che le diagonali hanno uguale lunghezza.

## DISTANZE E RETTE IN $\mathbb{E}^3$

Si consideri uno spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ di dimensione 3, dotato di un riferimento monometrico ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

**Problema 4.5. Distanza punto-piano** *Sia* $\alpha$ *il piano di equazione cartesiana* $2x - 3y + 6z - 3 = 0$ *nel sistema di riferimento fissato. Calcola la distanza del punto* $A(2, -1, 2)$ *dal piano* $\alpha$*.*

*Soluzione.* Il punto $A$ non appartiene al piano $\alpha$, perchè sostituendo le sue coordinate nell'equazione di $\alpha$ si trova $2 \cdot 2 - 3(-1) + 6 \cdot 2 - 3 = 16$. Applicando la Proposizione 4.5.14, si ricava che la distanza tra $A$ e $\alpha$ è $D(A, \alpha) = \frac{|16|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{16}{\sqrt{49}} = \frac{16}{7}$.

**Problema 4.6. Lunghezza del prodotto vettoriale** *Siano assegnati i vettori* $\mathbf{v}(l, m, n)$ *e* $\mathbf{v}'(l', m', n')$. *Mostra che*

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'| = \sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|} \tag{4.66}$$

*dove* $\mathbf{A}$ *è la matrice*

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

*Soluzione.* Si osservi che l'esercizio è un caso particolare della formula elencata subito prime della formula (4.19). Il prodotto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \times \mathbf{v} & \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{w} & \mathbf{w} \times \mathbf{w} \end{pmatrix}$ ha determinante

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) &= (\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2 \\ &= (l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2, \end{aligned}$$

mentre il prodotto esterno

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = (mn' - nm')\mathbf{i} - (ln' - nl')\mathbf{j} + (lm' - ml')\mathbf{k} \tag{4.68}$$

ha norma $(mn' - nm')^2 + (ln' - nl')^2 + (lm' - ml')^2$. Svolgendo i calcoli, si prova l'asserto.

**Problema 4.7. Retta ortogonale e incidente due rette sghembe.** *Siano* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{S}'$ *due rette sghembe di uno spazio euclideo* $\mathbb{E}$ *di dimensione 3. Esiste una ed una sola retta* $\mathbb{S}''$ *ortogonale ad* $\mathbb{S}$ *ed* $\mathbb{S}'$ *ed incidente sia* $\mathbb{S}$ *che* $\mathbb{S}'$.

*Soluzione.* Siano $\mathbb{S} = P + < \mathbf{v} >$ e $\mathbb{S}' = P' + < \mathbf{v}' >$. Il complemento ortogonale $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$ di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$ ha dimensione 1; si indichi con $\mathbf{n}$ un generatore di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$. Si osservi che, ad esempio, è possibile prendere $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$. Detti $\alpha$ il piano per $\mathbb{S}$ e parallelo a $\mathbf{n}$ e $\alpha'$ il piano per $\mathbb{S}'$ e parallelo a $\mathbf{n}$, la retta $\mathbb{S}''$ cercata è l'intersezione tra $\alpha$ e $\alpha'$. Si osservi che si può scegliere, come particolare generatore $\mathbf{n}$ il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$.

**Problema 4.8.** *In* $\mathbb{E}$, *siano* $r$ *la retta di equazioni* $x - 3y + z = 0, 2x - 3z = -4$ *e* $s$ *la retta di equazioni* $x - y + z = 0, x + 2y - z = 0$, *nel fissato riferimento. Mostra che le rette sono sghembe e determina equazioni cartesiane per la retta* $l$ *ortogonale e incidente entrambe.*

*Soluzione.* La retta $r$ ha come vettore direttore $\mathbf{v}(9, 5, 6)$, mentre la retta $s$ ha come vettore direttore $\mathbf{v}'(-1, 2, 3)$: poichè tali vettori non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Considero il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, che ha componenti $(3, -33, 23)$. Osservo che la retta $s$ passa per l'origine, mentre la retta $r$ passa per il punto $(0, 4/9, 12/9)$ (ottenuto intersecando la retta con il piano $x = 0$). Poichè $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') \times \mathbf{OP} = -144/9 \neq 0$, le due rette non possono essere complanari, e dunque sono sghembe.

I piani nel fascio di piani per $r$ hanno equazione della forma

$$\lambda(x - 3y + z) + \mu(2x - 3z + 4) = 0 = (\lambda + 2\mu)\, x - 3\lambda\, y + (\lambda - 3\mu)\, z + 4\mu = 0.$$

Un tale piano è parallelo a $\mathbf{n}$ se e solo se le componenti di $\mathbf{n}$ soddisfano l'equazione della giacitura del piano, cioè se e solo se

$$0 = \lambda(3 - 3(-33) + 23) + \mu(2 \cdot 3 - 3(23)) = 125\lambda - 63\mu.$$

Ciò accade, in particolare, se $(\lambda, \mu) = (63, 125)$ (e ogni altra soluzione è proporzionale a questa), cioè per il piano $313\,x - 189\,y - 312\,z + 500 = 0$ che fornisce una prima equazione per la retta cercata $l$. Una seconda equazione per $l$ si trova in modo analogo, cercando, nel fascio di piani per $s$ il piano parallelo a $\mathbf{n}$, che risulta avere equazione $145\,x + 32\,y + 27\,z = 0$. La retta cercata $l$ ha dunque equazioni cartesiane $313\,x - 189\,y - 312\,z + 500 = 0, 145\,x + 32\,y + 27\,z = 0$.

**Problema 4.9. Distanza punto-retta** *In $\mathbb{E}$, siano assegnati un punto $B(b_1, b_2, b_3)$ e la retta $r$ passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e di vettore direttore $\mathbf{v}(l, m, n)$. Calcola la distanza tra $B$ e $r$.*

*Soluzione.* Il punto $B$ appartiene alla retta $r$ se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, il punto $B$ ha distanza nulla dalla retta. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Ma la distanza cercata è esattamente l'altezza di questo parallelogramma, e dunque

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

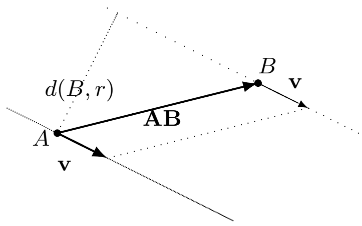


**Figura 4.8.** Distanza punto-retta

**Problema 4.10.** *Calcola la distanza tra il punto $B(1, -3, 7)$ e la retta $r$ di equazioni parametriche : $x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 2 - t$, con $t \in \mathbb{R}$.*

*Soluzione.* La retta $r$ passa per il punto $A(2, 4, 2)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(-1, 3, -1)$. Il vettore $\mathbf{AB}(-1, -7, 5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}$ e dunque $B$ non appartiene a $r$ e la distanza tra $B$ e $r$ è strettamente positiva. Il vettore $(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v})$ ha componenti $(-8, -6, -10)$ e lunghezza $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{11}$. La distanza tra il punto $B$ e la retta $r$ è dunque $d(B, r) = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

**Problema 4.11. Distanza tra due rette parallele** *In $\mathbb{E}$, siano assegnate la retta $r$ passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e la retta $s$, parallela ad $r$ e passante per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$; sia $\mathbf{v}(l, m, n)$ un vettore direttore delle due rette. Calcola la distanza tra $r$ e $s$.*

*Soluzione.* La retta $r$ coincide con la retta $s$ se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, le due rette hanno distanza nulla tra loro. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Poichè la distanza cercata è esattamente l'altezza di tale parallelogramma, otteniamo che

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

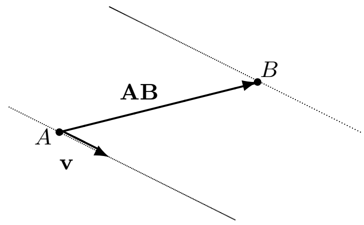


**Figura 4.9.** Distanza tra rette parallele

**Problema 4.12.** *Calcola la distanza tra le rette $r$ e $s$ di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 5 + 3h \\ y = 2 + h \\ z = -h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

*Soluzione.* La retta $r$ passa per il punto $A(2, -1, 5)$ mentre la retta $s$ passa per il punto $B(5, 2, 0)$, e le due rette sono parallele perchè hanno lo stesso vettore direttore $\mathbf{v}(3, 1, -1)$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(3, 3, -5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}(3, 1, -1)$ e dunque le due rette sono distinte e hanno distanza non nulla tra loro. Il vettore $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}(2, -12, -6)$ ha lunghezza $\sqrt{184}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{43}$. La distanza tra le due rette è dunque $d(r, s) = \frac{\sqrt{184}}{\sqrt{43}}$.

**Problema 4.13. Distanza tra due rette sghembe** *Siano $r$ e $s$ due rette sghembe di $\mathbb{E}$ di dimensione 3. Supponiamo che $r$ abbia vettore direttore $\mathbf{v}(l, m, n)$ e passi per il punto $A(a_1, a_2, a_3)$, mentre $s$ abbia vettore direttore $\mathbf{v}'(l', m', n')$ e passi per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$.*
*a) Mostra che la distanza tra $r$ e $s$ coincide con*

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|}$$

*b) Mostra che esiste un solo piano $\alpha$ contenente $s$ e parallelo a $r$. La distanza tra $r$ e $s$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto $P$ di $r$ da $\alpha$.*

*Soluzione.* a) Poichè le rette sono sghembe, lo scalare $\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$ è non nullo, e il suo valore assoluto coincide con il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{AB}$. La distanza tra le due rette $r$ e $s$ è esattamente l'altezza di tale parallelepipedo rispetto alla base di spigoli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$: la distanza può quindi essere ricavata dividendo il volume $|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|$ del parallelepipedo per l'area di base. Ricordando che l'area di base coincide con la lunghezza del prodotto esterno $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, si ricava la formula cercata:

$$d(r, s) = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|} \right|. \tag{4.69}$$

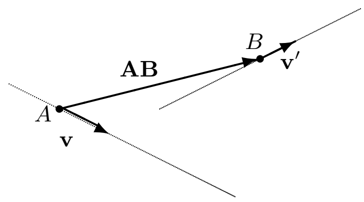


**Figura 4.10.** Distanza tra rette sghembe

La formula della distanza può essere scritta anche nel modo seguente

$$d(r, s) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1' & a_2 - b_2' & a_3 - b_3' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{\sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}} \tag{4.70}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

Si osservi che, in questo modo, viene calcolata la distanza tra le due rette, senza ricavare in modo esplicito la coppia di punti che minimizza la distanza. Per ottenere tale coppia di punti, è possibile seguire il procedimento dell'Esercizio svolto 4.7 individuando la retta incidente $r$ e $s$ e ortogonale ad entrambe: i punti di incidenza di tale retta con $r$ e $s$, rispettivamente, sono la coppia di punti di minima distanza.
b) Poichè $r$ e $s$ hanno vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ tra loro linearmente indipendenti, ogni piano parallelo sia a $r$ che a $s$ ha giacitura $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$: tali piani costituiscono una famiglia di piani paralleli, e in particolare è unico il piano per $s$ parallelo a $r$: è il piano $B+ < \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$, che chiamiamo $\alpha$. Poichè $s \subset \alpha$, la distanza di $r$ da $s$ è maggiore o uguale alla distanza tra $r$ e $\alpha$: $d(r, s) \leq d(r, \alpha)$. D'altra parte, poichè $r$ è parallela ad $\alpha$, tutti i punti di $r$ hanno la stessa distanza da $\alpha$; dunque $d(r, \alpha) = d(A, \alpha)$. Ma $d(A, \alpha)$ è la distanza tra $A$ e la sua proiezione ortogonale $A_\alpha$, cioè l'intersezione tra $\alpha$ e la retta per $A$ ortogonale a $\alpha$: ma tale intersezione è contenuta in $s$ (come si vede dall'Esercizio svolto 4.7.

**Problema 4.14.** *Calcola la distanza tra le rette $r$ e $s$ di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3h \\ z = -2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

*Soluzione.* La retta $r$ passa per il punto $A(3,1,4)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(2,1,-1)$, mentre la retta $s$ passa per il punto $B(1,0,0)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}'(1,3,-2)$. Il prodotto esterno $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$ ha componenti $(1,3,5)$ e lunghezza $|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'| = \sqrt{35}$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(-2,-1,-4)$ non è complanare con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, perchè $\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') = -21 \neq 0$, e dunque le due rette sono effettivamente sghembe. In base all'Esercizio svolto 4.13, la distanza tra le due rette è dunque $d(r,s) = \frac{21}{\sqrt{35}}$.

*Osservazione 4.6.* Siano $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ due rette sghembe di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ di dimensione 3. Esiste un solo piano $\alpha$ contenente $\mathbb{S}$ e parallelo a $\mathbb{S}'$. La distanza tra $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto $P'$ di $\mathbb{S}'$ da $\alpha$.

**Problema 4.15. Piani paralleli per due rette sghembe** *Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard, siano $\mathbb{S}$ la retta di equazioni $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ ed $\mathbb{S}'$ la retta di equazioni $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.*
*a) Determina equazioni cartesiane della retta $\mathbb{S}''$ che interseca ortogonalmente sia $\mathbb{S}$ che $\mathbb{S}'$.*
*b) Determina la distanza tra $\mathbb{S}$ che $\mathbb{S}'$.*

*Soluzione.* a)Un vettore parallelo ad $\mathbb{S}$ è $\mathbf{v} = (2,3,4)$, mentre un vettore parallelo ad $\mathbb{S}'$ è $\mathbf{v}' = (1,2,3)$. Quindi un vettore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ è il loro prodotto vettoriale $\mathbf{w} = (1,-2,1)$. I fasci di piani per $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ hanno equazione, rispettivamente

$$2\lambda x + 4\mu y - (\lambda + 3\mu)z - 2\lambda - 8\mu = 0$$
$$(2\lambda + 3\mu)x - \lambda y - \mu z = 0.$$

Un piano del primo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda + 4\mu(-2) - (\lambda + 3\mu) = 0$, ossia per $(\lambda, \mu)$ proporzionale a $(11,1)$. Un piano del secondo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda + 3\mu) - \lambda(-2) - \mu = 0$, ossia per $(\lambda, \mu)$ proporzionale a $(1,-2)$. I piani $\pi$ e $\pi'$ sono dunque:

$$\pi : 22x + 4y - 14z - 30 = 0, \qquad \pi' : 4x + y - 2z = 0$$

Si ha quindi $\mathbb{S}'' = \begin{cases} 22x + 4y - 14z - 30 = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$.

b) La distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ è la distanza tra i punti $P = \mathbb{S} \cap \mathbb{S}''$ e $Q = \mathbb{S}' \cap \mathbb{S}''$.

Volendo determinare la distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ si può anche procedere come segue. Il piano $\alpha$ nel fascio per $\mathbb{S}$ parallelo a $\mathbb{S}'$ si ricava per $2\lambda + 8\mu - (\lambda + 3\mu)3 = 0$:

$$\alpha : 2x - 4y + 2z + 6 = 0.$$

La distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto $P'$ di $\mathbb{S}'$ da $\alpha$; ad esempio, per $P'(0,0,0)$, si ricava che $d(\mathbb{S}, \mathbb{S}') = \frac{6}{\sqrt{4+16+4}}$.

# Esercizi

**PIANO EUCLIDEO**

Considera il piano affine numerico $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard.

**4.1.** Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(3,1)$ e $\mathbf{y}(-1,2)$. Calcola $|\mathbf{Ox}|$, $|\mathbf{Oy}|$, $|\mathbf{Ox}+\mathbf{Oy}|$ e $|\mathbf{Ox}-\mathbf{Oy}|$.

**4.2.** Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(1,4)$ e $\mathbf{y}(4,1)$.
(i) Calcola il coseno dell'angolo $\alpha$ fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{Oy}$.
(ii) Calcola il coseno dell'angolo $\alpha$ fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $-\mathbf{Oy}$.
(iii) Calcola il coseno dell'angolo $\alpha$ fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $-2\mathbf{Oy}$.
(iv) Determina un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^2)$ tale che l'angolo fra $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{v}$ sia $\pi/3$.

**4.3.** Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(1,-1)$ e $\mathbf{y}(4,3)$.
Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
Calcola l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
Calcola l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

**4.4.** Siano $\mathbf{x}(3,1)$, $\mathbf{y}(5,6)$ e $\mathbf{z}(2,2)$. Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

**4.5.** Siano $\mathbf{x}(x_1,x_2)$, $\mathbf{y}(y_1,y_2) \in \mathbb{E}^2$ e sia $\mathbf{p}(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2})$. Calcola la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{x}$, la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{y}$ e la distanza da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Deduci che $\mathbf{p}$ è il punto medio tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

**4.6.** Sia $l$ la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 1+3t \\ x_2 = 2+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Determina le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a $l$. Determina inoltre la distanza di $\mathbf{q}$ da $l$.

**4.7.** Considera la retta $l$ di equazione cartesiana $2x - 3y = 4$ e il punto $\mathbf{q}(1,-3)$.
i) Determina le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a $l$.
ii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ da $l$.

**4.8.** Considera la retta $l$ di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 3+t \\ x_2 = -1-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $\mathbf{q}(0,3)$.
i) Calcola la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta $l$.
ii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ da $l$.
iii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ dalla retta di equazione $3x - y = -4$.

**4.9.** (i) Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - 5y = 1$.
(ii)Determina le equazioni della rotazione $R_{\mathbf{q},\beta} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di un angolo $\beta$ rispetto al punto $\mathbf{q}(2,3)$. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\mathbf{q},\beta}$, della retta $l$ di equazione cartesiana $x - 5y = 1$ e della retta per $\mathbf{q}$ ortogonale ad $l$.

**4.10.** Sia $l$ la retta di equazione $x + y = 0$.
i) Calcola le equazioni della riflessione $R$ che ha $l$ come luogo di punti fissi.
ii) Calcola le immagini tramite $R$ dei punti $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 3)$.
iii) Calcola le immagini tramite $R$ della retta di equazione parametrica $x_1 = 5, x_2 = -t$.

**4.11.** Calcola le immagini dei punti $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ tramite la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Analoga domanda utilizzando la riflessione di asse la retta di equazione $x = y$, oppure la retta di equazione $2x + 3y = 0$, oppure la retta di equazione $3x + y = 1$.

**SPAZIO EUCLIDEO DI DIMENSIONE 3**
Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard.

**4.12.** Siano $\mathbf{x}(3, 1, 2)$, $\mathbf{y}(-1, 2, 1)$, $\mathbf{z}(2, -1, 1)$.
i) Calcola la distanza tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
ii) Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{O}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
iii) Calcola il volume del parallelepipedo che ha come spigoli $\mathbf{Ox}$, $\mathbf{Oy}$ e $\mathbf{Oz}$.
iv) Calcola il coseno dell'angolo tra $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{Oy}$.

**4.13.** Siano $P(1, 0, -1)$, $Q(1, 0, 0)$, $l$ la retta di equazioni $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, $\pi$ il piano di equazione $2x + 3y + z = 1$.
i) Determinare la distanza tra $P$ ed $l$ e la distanza tra $P$ e $\pi$.
ii) Determinare la retta per $P$ e ortogonale a $\pi$.
iii) Determinare il piano per $P$ e ortogonale a $l$.
iv) Le proiezioni ortogonali di $Q$ su $l$ e su $\pi$.

**4.14.** Siano $r_1$ la retta di equazioni $x - 1 = \frac{y-2}{2} = -z$ ed $r_2$ la retta di equazioni $x - 2y = x + z = 0$. Determinare la retta $s$ che interseca ortogonalmente sia $r_1$ che $r_2$. Determinare inoltre la distanza tra $r_1$ ed $r_2$.

**4.15.** Sia $\mathbf{v}(-1, -1, -1)$.
i) Determina le equazioni della rotazione $\varphi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ di angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.
ii) Siano $l$ la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -1 + t \\ x_3 = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, $r$ la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$, $\pi$ il piano di equazione cartesiana $2x_2 + x_3 = 1$. Determinare le immagini di $l$, $r$ e $\pi$ tramite $\varphi$.

**4.16.** Determinare le equazioni della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno alla retta $l$ di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = t \end{cases}$ orientata da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.