Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

II Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, **non si è autorizzati** ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbf{R}^3$, si consideri il riferimento vettoriale $\mathcal{R} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$, i cui i vettori si esprimono in coordinate rispetto al riferimento canonico $\mathcal{E}$ nel modo seguente (per comodità per riga):

$$\underline{v}_1 = (1,0,1), \ \ \underline{v}_2 = (1,1,2), \ \ \underline{v}_3 = (1,-1,2).$$

Si consideri inoltre l'endomorfismo $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ definito da:

$$f(\underline{v}_1 + \underline{v}_2) = f(\underline{v}_2) = \underline{v}_3, \ \ f(\underline{v}_3) = \underline{v}_1.$$

(i) Verificare che $\mathcal{R}$ è un riferimento vettoriale positivamente orientato per $\mathbf{R}^3$.

(ii) Determinare $A := M_{\mathcal{E}}(f)$, i.e. la matrice rappresentativa dell'endomorfismo f nel riferimento canonico $\mathcal{E}$.

(iii) Determinare equazioni parametriche ed equazioni cartesiane (in forma normale), nel riferimento $\mathcal{E}$, dei sottospazi $\mathrm{Ker}(f)$ ed $\mathrm{Im}(f)$.

Esercizio 2. Si consideri il piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, dotato di riferimento affine canonico $\mathcal{R}_{aff} := (O, \mathcal{E})$, dove O l'usuale punto origine, $\mathcal{E}$ il riferimento vettoriale canonico e (x_1, x_2) le coordinate affini nel riferimento $\mathcal{R}_{aff}$. Siano date le rette r e s che, in $\mathcal{R}_{aff}$, hanno equazioni cartesiane rispettivamente:

$$r: \ x_1 - 1 = 0, \quad s: x_1 - x_2 - 1 = 0.$$

(i) Nel fascio proprio di rette $\mathcal{F}$, generato dalle rette r e s, determinare la retta t del fascio $\mathcal{F}$ che è parallela alla retta di equazione cartesiana $x_2 = 2$.

(ii) Si considerino il punto $P = r \cap s$ ed i vettori $\underline{r} = (0, 2)$ (vettore direttore di r) e $\underline{s} = (1, 1)$ (vettore direttore di s). Si indichi con

$$\mathcal{R}'_{aff} := (P, \{\underline{r}, \underline{s}\})$$

il sistema di riferimento che ha come origine il punto P e come riferimento vettoriale associato $\mathcal{R}' := \{\underline{r}, \underline{s}\}$. Sia (y_1, y_2) il corrispondente sistema di coordinate per $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ in $\mathcal{R}'_{aff}$. Determinare l'equazione matriciale del cambiamento di coordinate che esprime le coordinate (y_1, y_2) in funzione delle coordinate (x_1, x_2).

(iii) Considerata la retta t trovata al punto (i), trovare la sua equazione cartesiana nelle coordinate (y_1, y_2) del riferimento $\mathcal{R}'_{aff}$.

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale numerico euclideo $\mathbf{R}^3$, munito del prodotto scalare standard, si considerino i vettori

$$\underline{v}_1 = (2,1,1),\ \underline{v}_2 = (0,2,-1),\ \underline{v}_3 = (1,0,4),\ \underline{v}_4 = (1,-1,2)$$

espressi in coordinate (per comodità scritte per riga) rispetto al riferimento canonico $\mathcal{E}$. Si considerino inoltre i sottospazi $U := \langle \underline{v}_1,\ \underline{v}_2 \rangle$ e $W := \langle \underline{v}_3,\ \underline{v}_4 \rangle$.

(i) Dopo aver verificato che $\mathcal{R} := (\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3)$ è un riferimento vettoriale di $\mathbf{R}^3$, determinare un riferimento vettoriale ortonormale per $\mathbf{R}^3$ dedotto da $\mathcal{R}$.

(ii) Determinare la dimensione ed una base ortonormale del sottospazio $U + W$.

(iii) Determinare la dimensione ed una base ortogonale del sottospazio $U \cap W$.

Svolgimento II Esonero

Esercizio 1

(i) La matrice cambiamento di base è:

$$M_{\mathcal{E},\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$\det(M_{\mathcal{E},\mathcal{R}}) = 2-1+0-[1-2] = 2-1-1+2 = 2 \neq 0$$

Quindi $\mathcal{R}$ è un riferimento di $\mathbb{R}^3$ ed è positivamente orientato, visto che $\det(M_{\mathcal{E},\mathcal{R}}) = 2 > 0$

(ii) Notiamo che

$$\begin{cases} f(\underline{v}_1+\underline{v}_2) = f(\underline{v}_2) \iff f(\underline{v}_1)+f(\underline{v}_2) = f(\underline{v}_2) \iff f(\underline{v}_1) = \underline{0} \\ f(\underline{v}_2) = \underline{v}_3 \\ f(\underline{v}_3) = \underline{v}_1 \end{cases}$$

Pertanto $M_{\mathcal{R}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E},\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}(f) \cdot M_{\mathcal{R},\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{R}} \cdot M_{\mathcal{R}}(f) \cdot M^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{R}}$$

Calcoliamo allora $M^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{R}}$:

- La matrice dei cofattori è: $\begin{pmatrix} +4 & -1 & -1 \\ 0 & +1 & -1 \\ -2 & +1 & +1 \end{pmatrix}$
- La matrice aggiunta è: $\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$
- La matrice inversa è: $\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = M^{-1}_{\mathcal{E},\mathcal{R}}$

Quindi

$$M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

(iii) Notando che $rg(M_{R_1}(f)) = 2 \Rightarrow$ ②

$\dim(Im(f)) = 2$ e dunque $\dim(\ker(f)) = 1$

Dalla definizione di f si ha:

* $\ker(f) = \langle \underline{v}_1 \rangle$ quindi $\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 0 \\ x_3 = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$

e $\begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$, sono risp. eq. param. e cartesiane di $\ker(f)$

* $Im(f) = \langle f(\underline{v}_2), f(\underline{v}_3) \rangle = \langle \underline{v}_3, \underline{v}_1 \rangle$ quindi

$$\begin{cases} x_1 = t + s \\ x_2 = 0 - s \\ x_3 = t + 2s \end{cases}, \quad t,s \in \mathbb{R}, \quad \det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x_2 - x_3) - (-x_1 + 2x_2) = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_1 - x_2 - x_3 = 0}$$

sono eq. parametriche ed equazione cartesiana di $Im(f)$

Esercizio 2

(i) Notiamo che

$$r \cap s = P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pertanto il fascio $\mathcal{F}$ è il fascio di rette di centro P; l'equazione del fascio è ad esempio

$$\lambda(x_1 - 1) + \mu x_2 = 0 \Leftrightarrow \lambda x_1 + \mu x_2 - \lambda = 0$$

La condizione di parallelismo con la retta $x_2 = 2$ è (λ, μ) proporzionale a $(0, 1) \Rightarrow$ la retta t è $\boxed{x_2 = 0}$

(ii) Il cambiamento di coordinate tra i due riferimenti deve essere della forma

$$\underline{Y} = A\underline{x} + \underline{c} \qquad \underline{Y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

Abbiamo che

$$A = M_{R,\mathcal{E}} = M^{-1}_{\mathcal{E},R} \qquad \text{dove } R = \{\underline{r}, \underline{s}\}$$

$$M_{\mathcal{E},R} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow M^{-1}_{\mathcal{E},R} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Poichè nelle coordinate $\underline{y}$ il punto P è t.c. $\underline{Y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ si ha:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -\frac{1}{2} + c_1 \\ 0 = 1 + c_2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} c_1 = 1/2 \\ c_2 = -1 \end{cases}$$

Pertanto

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = A \cdot \underline{x} + \underline{c}$$

è <u>l'equazione matriciale dell'affinità cercata</u>

(iii) Le formule inverse sono date da:

$$A^{-1} \cdot \underline{y} - A^{-1} \cdot \underline{c} = \underline{x} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

cioè: $\begin{cases} x_1 = y_2 + 1 \\ x_2 = 2y_1 + y_2 \end{cases}$

Poichè la retta t in R_{aff} ha eq. cartesiana $x_2 = 0$, l'equazione di t in R'_{aff} è: $\boxed{2y_1 + y_2 = 0}$

Esercizio 3

(i) $M_{\mathcal{E},\mathcal{R}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(M_{\mathcal{E},\mathcal{R}}) \neq 0$

$\mathcal{R}$ è un riferimento per $\mathbb{R}^3$

Ortogonalizziamo $\mathcal{R}$ secondo Gram-Schmidt

$\underline{w}_1 = \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \pi_{\underline{w}_1}(\underline{v}_2) = \underline{v}_2 - \left(\frac{\underline{v}_1 \times \underline{v}_2}{\|\underline{v}_1\|}\right)\underline{v}_1$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 11/6 \\ -7/6 \end{pmatrix} \underset{\text{proporz.}}{\sim} \begin{pmatrix} -2 \\ 11 \\ -7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$

prenderò $\underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \\ 7 \end{pmatrix}$

Potremmo continuare con Gram-Schmidt oppure, per brevità possiamo usare che siamo in $\mathbb{R}^3$ dove esiste prodotto vettoriale $\Rightarrow$

$\underline{w}_3 = \underline{w}_1 \wedge \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -11 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -12 \\ -24 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

Ma allora poiché $|\underline{w}_1| = \sqrt{6}$, $|\underline{w}_2| = \sqrt{174}$, $|\underline{w}_3| = \sqrt{29}$

si ha

$\underline{f}_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} \quad \underline{f}_2 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{174} \\ -11/\sqrt{174} \\ 7/\sqrt{174} \end{pmatrix} \quad \underline{f}_3 = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{29} \\ -2/\sqrt{29} \\ -4/\sqrt{29} \end{pmatrix}$

(ii) Poiché $U + W = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 \rangle = \mathbb{R}^3$

si ha che

$\dim(U + W) = 3$

e la base ortonormale di $U + W$ e la base ortonormale di $U + W$ è quella trovata al punto (i)

(iii) $\dim(U) = \dim(W) = 2$ e per Grassmann abbiamo che $\dim(U \cap W) = 1$. Notiamo che:

$$t_1\,\underline{v}_1 + t_2\,\underline{v}_2 = s_1\,\underline{v}_3 + s_2\,\underline{v}_4 \iff$$

$$\begin{cases} 2t_1 + 0\,t_2 = s_1 + s_2 \\ t_1 + 2\,t_2 = 0\,s_1 - s_2 \\ t_1 - t_2 = 4\,s_1 + 2\,s_2 \end{cases} \iff \begin{cases} 2t_1 = s_1 + s_2 \\ s_2 = -t_1 - 2t_2 \\ t_1 - t_2 = 4\,s_1 + 2\,s_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} s_1 = 2t_1 - s_2 \\ s_2 = -t_1 - 2t_2 \\ 4s_1 + 2s_2 = t_1 - t_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s_2 = -t_1 - 2t_2 \\ s_1 = 2t_1 - (-t_1 - 2t_2) = 3t_1 + 2t_2 \\ 4s_1 + 2s_2 = t_1 - t_2 \end{cases}$$

Quindi

$$4(3t_1 + 2t_2) + 2(-t_1 - 2t_2) = t_1 - t_2$$

che diventa

$$12t_1 + 8t_2 - 2t_1 - 4t_2 = t_1 - t_2 \Rightarrow$$

$$10t_1 - t_1 = -4t_2 - t_2 \Rightarrow 9t_1 = -5t_2$$

cioè $\boxed{t_2 = -\frac{9}{5}t_1}$

Sostituendo in

$t_1\,\underline{v}_1 + t_2\,\underline{v}_2$ si ha

$$t_1\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{9}{5}t_1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix} = t_1\left[\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{9}{5}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}\right]$$

$$= t_1\begin{pmatrix}2\\-\frac{13}{5}\\\frac{14}{5}\end{pmatrix} \Rightarrow U \cap W = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}10\\-13\\14\end{pmatrix}\right\}.$$

Il vettore $\underline{w} = \begin{pmatrix}10\\-13\\14\end{pmatrix}$ della base di $U \cap W$ costituisce già una base ortogonale per $U \cap W$.