

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovenà

I Prova di Esonero

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME NOME:

Esercizio 1. Si consideri l' $\mathbb{R}$ -spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$, munito di riferimento canonico R_e . Si considerino i seguenti vettori, espressi in componenti rispetto a R_e :

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare la dimensione ed una base del sottospazio vettoriale $U := \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle$.
- (ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di U nel riferimento R_e per $\mathbb{R}^4$.
- (iii) Stabilire se $W := \langle \mathbf{u}_1 \rangle$ e' un sottospazio proprio di U ed, in caso di risposta affermativa, trovare equazioni cartesiane di W nel riferimento R_e per $\mathbb{R}^4$.
- (iv) Determinare equazioni parametriche nel riferimento R_e di un sottospazio supplementare ad U .

Esercizio 2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 5}$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x , a coefficienti in $\mathbb{K}$ e di grado al più 5. Si consideri il sottoinsieme

$$U := \left\{ \sum_{k=0}^5 a_k x^k \in V \mid a_k = a_{k+2}, \text{ per ogni } 0 \leq k \leq 3 \text{ tale che } k \text{ sia inoltre pari} \right\}.$$

- (i) Dimostrare che U è un sottospazio di V
- (ii) Determinare $\dim_{\mathbb{K}}(U)$ ed una base di U .
- (iii) Estendere ad una base per V la base di U individuata al punto (ii).
- (iv) Denotato con R' il riferimento di V individuato al punto (iii), determinare le componenti $\varphi_{R'}^{-1}(p(x))$, dove $p(x) := 1 - x \in V$ e dove $\varphi_{R'} : \mathbb{K}^6 \rightarrow V$ è l'applicazione *coordinate* rispetto al riferimento R' .

Esercizio 3. Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$, con riferimento cartesiano affine $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, si consideri la retta affine

$$r : \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= -1 \end{cases}$$

- (i) Si determini un vettore direttore della retta affine r ed equazioni parametriche di r .
- (ii) Dato il punto P che nel, riferimento affine dato, ha coordinate $P = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, determinare equazioni parametriche e cartesiane del minimo (i.e. di dimensione minima) sottospazio affine S che contenga sia P che r .
- (iii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta affine ℓ , parallela a r e passante per P .
- (iv) Stabilire se ℓ e' contenuta in S .

Esercizio 1

(i) Sia $A_U = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ la matrice che ha per colonne i vettori u_1, u_2, u_3

Con Eliminazione di Gauss-Jordan

$$A_U \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_4} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_4 \rightarrow R_4 - \frac{1}{2}R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \rightarrow R_2 + R_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Rg}(A_U) = 2 \Rightarrow \dim(U) = 2$$

inoltre una base di U è $b = \{u_1, u_2\}$ ad esempio

(ii) $\underline{x} = t_1 u_1 + t_2 u_2 \in U$, dove t_1, t_2 parametri liberi

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1 = t_1 - t_2 \\ x_2 = t_2 \\ x_3 = 2t_2 \\ x_4 = -t_1 + t_2 \end{cases} \quad \underline{\text{eq. parametriche scalari}}$$

Poiché $\text{Codim}_{\mathbb{R}^4}(U) = 2 \leadsto$ ho bisogno di 2 equazioni cartesiane

$$\text{Notiamo che } \begin{cases} x_3 = 2x_2 \\ x_4 = -x_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_4 = 0 \end{cases} \text{ che}$$

sono manifestamente indipendenti

(iii) Poiché u_2 è indipendente da $u_1 \Rightarrow W \subset U$.

$$\text{In effetti } W = \left\{ \underline{x} = t u_1 = \begin{pmatrix} t \\ 0 \\ 0 \\ -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \Rightarrow W \text{ è determinato da } \begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

(iv) se U' è supplementare ad U in $\mathbb{R}^4 \Rightarrow \dim(U') = 2$

Si possono scegliere $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U$ perché non soddisfa $x_1 + x_4 = 0$

$$\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U \text{ perché non soddisfa } 2x_2 - x_3 = 0 \Rightarrow$$

$$U' = \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2 \rangle = \langle \underline{e}_1, \underline{e}_2 \rangle \text{ ha eq. parametriche } \begin{cases} x_1 = s_1 \\ x_2 = s_2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \end{cases}$$

Esercizio 2

(i) Gli interi $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ che sono pari sono $k=0$ e $k=2$

$\Rightarrow U$ è definito da $a_0 = a_2$ e $a_2 = a_4$

Pertanto

$$P(x) \in U \Leftrightarrow P(x) = a + b x + a x^2 + c x^3 + a x^4 + d x^5$$

E' una verifica banale mostrare che U è stabile rispetto alle combinazioni lineari $\Rightarrow U$ è sottospazio di V

$$(ii) P(x) = a(1+x^2+x^4) + b x + c x^3 + d x^5 \Rightarrow$$

$$\dim(U) = 4 \quad \text{ed una base di } U \text{ è } b := \{1+x^2+x^4, x, x^3, x^5\}$$

(iii) Notiamo che $x^2, x^4 \notin U$ e x^2 e x^4 sono lin. indipendenti in V . Poiché $\dim_{\mathbb{K}}(V) = 6 \Rightarrow$

$$C = \{1+x^2+x^4, x, x^3, x^5, x^2, x^4\}$$

è una possibile estensione di b .

(iv) Notiamo che

$$1-x = 1 \cdot (1+x^2+x^4) - 1 \cdot x + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^5 - 1 \cdot x^2 - 1 \cdot x^4$$

$$\Rightarrow \varphi_{R'}^{-1}(P(x)) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

(i) Un vettore direttore di r è una soluzione non banale del SLO $(2; 3; \mathbb{R})$ $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$ che è equivalente a

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ +\frac{1}{2}x_2 - \frac{3}{2}x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 - 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$x_3 = t, \quad x_2 = 3t \quad \& \quad x_1 = -4t \Rightarrow x_1 = -2t$$

$$\Rightarrow \underline{v}_r = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ proporzionale a } \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Poiché $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \in r \Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ sono eq. parametriche cercate

(ii) Notiamo che $P \notin r$, pertanto il minimo S da costruire P e r è il piano contenente r e passante per P

Poiché $Q \in r \subset S$ e $P \in S \Rightarrow \overrightarrow{PQ} = Q - P \in V(S) =$ giacitura di S .

$$\text{Ora } \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ -3/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{w} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in V(S)$$

$$\text{e } V(S) = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

Ma allora, visto che $P \in S$, le equazioni parametriche del piano S sono:

$$\underline{x} = P + V(S) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 2t_1$$

$$x_2 = 1 + 3t_1 + t_2$$

$$x_3 = 2 - t_1 + t_2$$

Per determinare eq. cartesiane di S

$$t_1 = \frac{x_1}{2}$$

$$t_2 = x_2 - \frac{3}{2}x_1 - 1$$

$$x_3 = 2 - \frac{x_1}{2} + x_2 - \frac{3}{2}x_1 - 1 = 2 - 2x_1 + x_2 - 1$$

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 1$$

(iii) La retta ℓ passa per $P \notin \pi$ e ha lo stesso vettore direttore di π quindi

$$\underline{X} = P + s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R}$$

$$x_1 = 2s$$

$$x_2 = 1 + 3s \quad \text{eq. parametriche}$$

$$x_3 = 2 - s$$

Le equazioni cartesiane sono date da e.g.

$$s = 2 - x_3 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + 3(2 - x_3) \\ x_1 = 2(2 - x_3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1 + 6 - 3x_3 \\ x_1 = 4 - 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_3 = 4 \end{cases}$$

(iv) Poiché $P \in S$ e $\underline{N}_P \in V(S) \Rightarrow$

la retta ℓ è ovviamente contenuta nel piano S

Infatti

$$2(2s) - (1 + 3s) + (2 - s) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\cancel{4s} - \cancel{1} - \cancel{3s} + \cancel{2} - \cancel{s} = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$1 = 1 \quad (\text{ok})$$