

**Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"**  
**Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021**  
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2  
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovenà

**II Appello - Luglio 2021**

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **3 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

**COGNOME – NOME:** .....

**Esercizio 1.** Nel piano euclideo numerico  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$ , con riferimento cartesiano canonico  $RC(O; x_1, x_2)$ , sono assegnati il vettore  $\mathbf{v}_1$  di componenti  $(1, 3)$  ed il vettore  $\mathbf{v}_2$  di componenti  $(1, 1)$ . Sia inoltre  $r$  la retta parallela a  $\mathbf{v}_1$  e passante per il punto  $A = (2, 5)$ .

(i) Denotata con  $\sigma_r$  la simmetria di  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$  rispetto alla retta  $r$ , determinare l'espressione in coordinate di  $\sigma_r$  (i.e. le formule della riflessione rispetto alla retta  $r$ ).

(ii) Sia  $\mathcal{C}$  la circonferenza di centro  $O = (0, 0)$  e raggio 1. Determinare equazione cartesiana della conica ottenuta per trasformazione di  $\mathcal{C}$  mediante  $\sigma_r$ .

(iii) Si indichi con  $V$  lo spazio vettoriale dei vettori paralleli a  $\mathbb{E}_{\mathbb{R}}^2$  e si consideri lo spazio vettoriale duale  $V^*$  di  $V$ . Determinare la base duale della base  $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ .

**Esercizio 2.** Nello spazio proiettivo numerico reale  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$ , con coordinate omogenee  $[x_0, x_1, x_2, x_3]$ , si considerino i punti  $P = [1, 0, 0, 2]$ ,  $Q = [0, 1, -1, 1]$  e  $R = [1, 1, -1, 1]$ .

(i) Determinare equazioni cartesiane e parametriche della retta affine  $\ell$ , nella carta affine dove  $x_0 \neq 0$ , che e' traccia della retta proiettiva  $L$  congiungente i punti  $P$  e  $Q$ . Dedurre inoltre che  $P$ ,  $Q$  e  $R$  non sono collineari.

(ii) Sia  $\varphi \in \text{Aut}(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3)$  una qualsiasi proiettivita' che manda i tre punti dati nel piano di equazione cartesiana  $x_0 = 0$ . Stabilire il luogo fisso di  $\varphi$ .

(iii) Determinare la dimensione della stella di rette di centro  $P$ .

**Esercizio 3.** Nel piano affine complessificato  $A_{\mathbb{C}}^2$ , sia fissato un sistema di riferimento  $RC(O; x, y)$  reale. Al variare di un parametro reale  $t \in \mathbb{R}$ , si consideri la conica affine  $\gamma_t$  che rispetto al riferimento reale scelto ha equazione reale:

$$\gamma_t : x^2 + 2txy + y^2 + t = 0, \quad t \in \mathbb{R}.$$

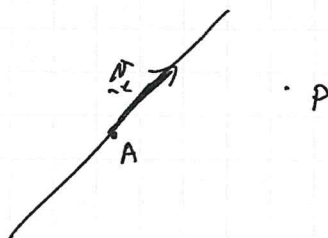
- (i) Stabilire per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\gamma_t$  e' non-degenere.
- (ii) Determinare per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$ , la conica  $\gamma_t$  e' un'iperbole e calcolarne asintoti e centro di simmetria.
- (iii) Determinare per quali valori di  $t \in \mathbb{R}$   $\gamma_t$  e' un'ellisse non-degenere a punti reali.

## Svolgimento II Appello Geometria 2

Luglio 2021

### Esercizio 1

- i) simmetria di  $A \in \mathbb{R}^2$  rispetto alla retta di equazione parametrica vettoriale  
 $\underline{x} = A + t \underline{v}_2 \quad t \in \mathbb{R}$ , ove  $A = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ ,  $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$



Dato  $P(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ , il simmetrico di  $P$  rispetto a  $\ell$  è il punto  $P'$  tale che  $\text{dist}(P, \ell) = \text{dist}(P', \ell)$  e  $\overline{PP'} \perp \underline{v}_2$ .

Decomponiamo  $\overline{AP}$  nelle componenti parallela e ortogonale a  $\underline{v}_2$ .

Ricordando che la componente ortogonale  $\underline{v}_\perp$  è uguale a

$$\underline{v}_\perp = \overline{AP} - \frac{\langle \overline{AP}, \underline{v}_2 \rangle}{\|\underline{v}_2\|^2} \underline{v}_2 = \frac{(x_1-2) + 3(x_2-5)}{10} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

↑  
in word

L'immagine  $P'$  è il punto  $P + 2 \underline{v}_\perp$  di coordinate

$$\begin{pmatrix} x_1 + \frac{1}{5}(x_1-2) + \frac{3}{5}(x_2-5) \\ x_2 + \frac{3}{5}(x_1-2) + \frac{9}{5}(x_2-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{11}{10}x_1 + \frac{3}{10}x_2 - \frac{16}{10} \\ \frac{3}{10}x_1 + \frac{13}{10}x_2 - \frac{43}{10} \end{pmatrix}$$

ii) la base duale  $\{v_1^*, v_2^*\} \subset B^*$  più comoda rispetto alla base  $e^* = \{e_1^*, e_2^*\}$  dual della base canonica.  
 Scrivendo  $v_1^* = m_{11} e_1^* + m_{12} e_2^*$  e  $v_2^* = m_{21} e_1^* + m_{22} e_2^*$   
 sappiamo che

$$\begin{aligned} v &= y_1 v_1^* + y_2 v_2^* \\ &= x_1 e_1^* + x_2 e_2^* \end{aligned}$$

Considera  $V_B \xrightarrow{\text{id}} V_{e^*}$

$$\begin{array}{ccc} \uparrow \varphi & & \uparrow \varphi \\ \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{L_A} & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

ove  $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

$\varphi$  è l'identificazione  
 da  $\mathbb{R}^2$  definita  
 dalla base  
 utilizzata.

e notiamo che  $A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ .

f forme lineari su  $V$ .  $f = u_1 e_1^* + u_2 e_2^*$   
 $= u_1' v_1^* + u_2' v_2^*$

$$\begin{aligned} f(v) &= (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2) A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\ &= (u_1' \ u_2') \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow (u_1' \ u_2') = (u_1 \ u_2) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(u_1' \ u_2') \frac{1}{-2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = (u_1 \ u_2)$$

$$(u_1, u_2) = -\frac{1}{2} (u_1' - 3u_2', -u_1' + u_2')$$

$$\Rightarrow v_1^* = -\frac{1}{2} e_1^* + \frac{1}{2} e_2^*, \quad v_2^* = +\frac{3}{2} e_1^* - \frac{1}{2} e_2^*$$

sono i vettori cercati.

## Esercizio 2

(2)

- (i) Poiché  $Q \in \{x_0 = 0\}$  la retta  $l$  non è altro che la retta per il punto  $P$  di coordinate affini

$$x = \frac{x_1}{x_0} = 0 \quad y = \frac{x_2}{x_0} = 0 \quad z = \frac{x_3}{x_0} = 2$$

il vettore direttore  $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$  dunque

$$l: \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2+t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad l: \begin{cases} x+y=0 \\ x-z=-2 \end{cases}$$

Il punto  $R$  corrisponde, nella carta affine, a  $R = (1, -1, 1)$

e  $R \notin l \Rightarrow P, Q$  e  $R$  non sono collineari in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$

- (ii) I tre punti generano un piano in  $\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  di equazione Cartesiana

$$\det \begin{pmatrix} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0 \rightsquigarrow \boxed{x_1 + x_2 = 0}$$

Poiché  $q$  deve mandare  $P, Q, R$  in 3 punti indipendenti

$q(P), q(Q)$  e  $q(R)$  in  $\{x_0 = 0\} \Rightarrow q(P) \vee q(Q) \vee q(R)$  coincide

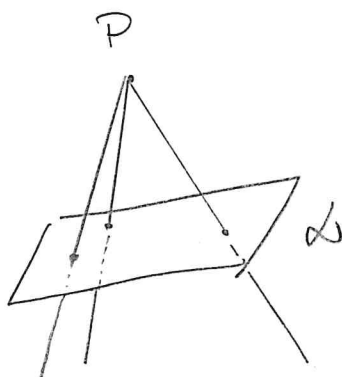
con  $x_0 = 0$

Per tanto il luogo fisso di  $q$  è la retta  $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$

- (iii)  $\dim(\Sigma(P)) = 2$  visto che,  $\forall \alpha \subset \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^3$  non passante per  $P$ , si ha una corrispondenza biunivoca

$$\begin{array}{ccc} \alpha & \longrightarrow & \Sigma(P) \\ q & \longrightarrow & \langle q, P \rangle = q \vee P \end{array}$$

$$\alpha \cap l_P \longleftarrow l_P$$



(i) La matrice associata a  $\gamma_t$  è

$$A = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A) = t \cdot (1 - t^2)$$

Perciò  $\gamma_t$  è non degenera se e solo se

$$t \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, -1\}$$

(ii)  $A_{00} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ t & 1 \end{pmatrix}$  e  $\det(A_{00}) = 1 - t^2$

Orsì  $\gamma_t$  è un'iperbole non degenera se e solo se  $t \neq 0, 1, -1$  e

$$\det(A_{00}) < 0 \quad \text{i.e.} \quad 1 - t^2 < 0 \Leftrightarrow t^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow t < -1 \quad \text{e} \quad t > 1$$

Pertanto  $\gamma_t$  è iperbole non degenera  $\forall t \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

I punti impropri di  $\gamma_t$  sono dati da

$$\begin{cases} X_1^2 + 2tX_1X_2 + X_2^2 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

$X_2 \neq 0$  altrimenti  $X_1 = X_2 = X_0 = 0$  //

Ponendo  $s = \frac{X_1}{X_2}$  si ha  $s^2 + 2ts + 1 = 0 \Rightarrow s = \frac{-2t \pm \sqrt{4t^2 - 4}}{2}$

$$\Rightarrow s = -t \pm \sqrt{t^2 - 1} \quad \text{e} \quad t^2 - 1 > 0 \quad \text{perché}$$

I punti impropri sono  $B_1 = [0, -t + \sqrt{t^2 - 1}, 1]$ ,  $B_2 = [0, -t - \sqrt{t^2 - 1}, 1]$

$$(0, -t + \sqrt{t^2 - 1}, 1) \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = (0, -t + \sqrt{t^2 - 1}, 1) \begin{pmatrix} t \\ x + ty \\ tx + y \end{pmatrix} =$$

$$= (-t + \sqrt{t^2 - 1})(x + ty) + tx + y = 0 \quad \boxed{(\sqrt{t^2 - 1})x + (1 - t + \sqrt{t^2 - 1})y = 0}$$

Asintoto

Analogamente

$$(0, -t - \sqrt{t^2 - 1}, 1) \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & t & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \boxed{(-\sqrt{t^2 - 1})x + (1 - t - \sqrt{t^2 - 1})y = 0}$$

Asintoto

Il centro è  $C = (0, 0)$  intersez. dei 2 asintoti



$$(iii) \det(A_{00}) > 0 \Leftrightarrow 1 - t^2 > 0 \Leftrightarrow$$

$$t^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow -1 < t < 1$$

Per avere  $\gamma_t$  non degenera allora  $t \neq 0$   
 quindi  $t \in (-1, 0) \cup (0, 1)$

Per le Thm. spettrali, poiché

$$P_{A_{00}}(x) = x^2 - 2tx + (1 - t^2)$$

entrambe le soluzioni sono reali e positive  $\alpha^2(t)$  e  $\beta^2(t)$

quindi  $\exists M \in O(2, \mathbb{R})$  t.c.  $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  e

$$\gamma_t: x' \alpha^2(t) (x')^2 + (\beta^2(t)) (y')^2 + t = 0 \quad \text{che è delle}$$

forme

$$\gamma_t: \frac{(x')^2}{\left(\frac{1}{\alpha(t)}\right)^2} + \frac{(y')^2}{\left(\frac{1}{\beta(t)}\right)^2} = -t$$

Pertanto  $\gamma_t$  è ellisse non degenera a punti  
 reali se e solo se  $t \in (-1, 0)$ .