Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

II Prova di Appello - Febbraio 2021

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **3 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si é autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi nell'indeterminata x, a coefficienti in $\mathbb{K}$ e di grado al piu' 4. Si consideri il sottospazio

$$U := \left\{ \sum_{k=0}^{4} a_k x^k \in V \mid a_0 - a_2 + a_4 = 0 \right\}.$$

(i) Determinare $\dim_{\mathbb{K}}(U)$ ed una base di U.
(ii) Determinare dimensione e base di un sottospazio U' di V che sia supplementare al sottospazio U.
(iii) Denotato con R' il riferimento di V costituito dall'unione dei due riferimenti di U e di U' individuati, rispettivamente, ai punti (i) ed (ii), determinare le coordinate del polinomio $f(x) = 3 \in V$ nel riferimento $\mathcal{R}'$.

Esercizio 2. Nello spazio euclideo numerico $\mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano monometrico ortonormale canonico $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, sono dati la retta r ed il piano α che hanno, rispettivamente, equazioni

$$r: \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \; t \in \mathbb{R}, \quad \text{e} \quad \alpha: \; x_1 - x_2 + x_3 = 3.$$

(i) Verificare che r e α sono incidenti, individuando le coordinate cartesiane del punto di intersezione $P = r \cap \alpha$.

(ii) Preso il punto $Q = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \in r$, determinare le coordinate cartesiane del punto H, punto proiezione ortogonale del punto Q sul piano α, e del punto K, punto simmetrico del punto Q rispetto al piano α.

(iii) Preso il punto $S = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \alpha$, determinare il volume del parallelepipedo che ha come spigoli i segmenti $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$, $\overline{PK}$.

Esercizio 3. Si consideri lo spazio vettoriale numerico euclideo $(\mathbb{R}^3, \times)$, dove $\times$ il prodotto scalare standard. Si consideri l'endomorfismo $f \in End(\mathbb{R}^3)$ che ha per nucleo $Ker(f)$ il piano vettoriale definito dall'equazione cartesiana

$$x_1 - x_2 = 0.$$

Si consideri $\underline{w}$ il vettore normale a $Ker(f)$, individuato dall'equazione cartesiana di $Ker(f)$ e si supponga $f(\underline{w}) = 2\underline{w}$

(i) Si individui $\{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2\}$ una base di $Ker(f)$. Denotato con $\mathcal{V} := \{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2, \underline{w}\}$ il riferimento individuato per $\mathbb{R}^3$, si descriva la matrice $M_{\mathcal{V}}(f)$, rappresentativa dell'endomorfismo f nel riferimento $\mathcal{V}$.

(ii) Determinare un riferimento ortonormale $\mathcal{G}$ per $\mathbb{R}^3$ dedotto dal riferimento $\mathcal{V}$ e si descriva la matrice $M_{\mathcal{G}}(f)$, rappresentativa dell'endomorfismo f nel riferimento $\mathcal{G}$.

(iii) Denotata con $\mathcal{E}$ la base canonica di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice $M_{\mathcal{E}}(f)$, rappresentativa dell'endomorfismo f nel riferimento $\mathcal{E}$, descrivendo esplicitamente la relazione di congruenza che sussiste tra $M_{\mathcal{G}}(f)$ e $M_{\mathcal{E}}(f)$.

Esercizio 1

(i) Il sottospazio $U = \{ p(x) = \sum_{k=0}^{4} a_k x^k \mid a_0 - a_2 + a_4 = 0 \}$ ha dimensione 4 ed un polinomio arbitrario in U è della forma

$$q(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (a_2 - a_0) x^4 + a_3 x^3$$
$$= a_0 (1 - x^4) + a_1 x + a_2 (x^2 - x^4) + a_3 x^3$$

Pertanto una base di U è data da

$$\underline{u}_1 = 1 - x^4, \quad \underline{u}_2 = x, \quad \underline{u}_3 = x^2 - x^4, \quad \underline{u}_4 = x^3$$

(ii) Poiché il polinomio

$$\underline{u}_5 = 1 \notin U \Rightarrow \{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \underline{u}_3, \underline{u}_4, \underline{u}_5\}$$ è la nuova base di $V = \mathbb{K}[x]_{\leq 4}$ ed un ssp. supplementare U' ad U è $U' = \langle \underline{u}_5 \rangle$

(iii) Nella base precedentemente descritta, il polinomio costante $f(x) = 3$, ha coordinate $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$ in quanto $f(x) = 3 \cdot \underline{u}_5$

Esercizio 2

(i) la retta $r: \underline{X} = \underline{p} + t\underline{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ ed il piano $\alpha: x_1 - x_2 + x_3 = 3$

sono incidenti nel punto $\underline{P} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$ perchè $P \in \alpha$ e $\underline{v} \notin V(\alpha)$

dove $V(\alpha): x_1 - x_2 + x_3 = 0$

(ii) Per trovare H, il punto proiezione ortogonale di $Q = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} \in r$ su α

Considero la retta l, passante per Q ed ortogonale ad α, che è

$$l: \underline{X} = \underline{q} + t\,\underline{n}_\alpha = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$$ dove $\underline{n}_\alpha$ vettore normale ad α

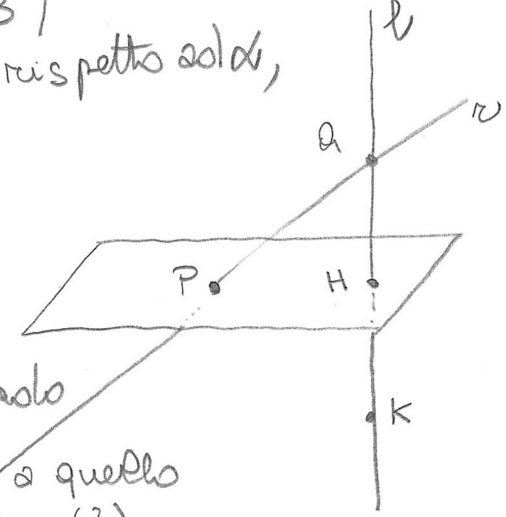
Si ha

$$l: \begin{cases} x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 + t \end{cases} \quad \text{e quindi } H = l \cap \alpha: \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 = 2 + t \\ x_2 = 1 - t \\ x_3 = 1 + t \end{cases} \Rightarrow$$

$$(2+t) - (1-t) + (1+t) = 3 \Leftrightarrow 2 + 3t = 3 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Per $t = \frac{1}{3}$ troviamo su l le coordinate cartesiane di H

$$H := \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\frac{1}{3}\\1-\frac{1}{3}\\1+\frac{1}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}7/3\\2/3\\4/3\end{pmatrix} \in \alpha$$



Per trovare il punto K, simmetrico di Q rispetto ad α,

si usa il parametro $t' = 2 \cdot t = 2 \cdot \frac{1}{3}$

$$K = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{2}{3}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2+\frac{2}{3}\\1-\frac{2}{3}\\1+\frac{2}{3}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/3\\1/3\\5/3\end{pmatrix}$$

(iii) Il punto $S = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} \in \alpha$ ed il parallelepipedo

di spigoli $\overline{PS}$, $\overline{PQ}$ e $\overline{PK}$ è congruente a quello

formato dai vettori $\underline{w} = \overrightarrow{PS} = S - P = \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$

$$\underline{v} = \overrightarrow{PQ} = Q - P = \begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\underline{u} = \overrightarrow{PK} = K - P = \begin{pmatrix}8/3\\1/3\\5/3\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5/3\\1/3\\-1/3\end{pmatrix}$$

Pertanto il volume del parallelepipedo è

$$|\underline{w} \wedge \underline{v} \times \underline{u}| = \left|\det\begin{pmatrix}2 & 1 & 5/3\\0 & 1 & 1/3\\-2 & -1 & -1/3\end{pmatrix}\right| = \left|-\frac{2}{3} - \frac{2}{3} - \left(-\frac{10}{3} - \frac{2}{3}\right)\right| = \left|\cancel{-\frac{2}{3}} - \frac{2}{3} + \frac{10}{3} + \cancel{\frac{2}{3}}\right| = \frac{8}{3}$$

Esercizio 3

(i) Poiché $\mathrm{Ker}(f) = \{ x_1 - x_2 = 0 \}$ una base di $\mathrm{Ker}(f)$ è data da $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{e}_3$ che è ortogonale rispetto al prodotto scalare x standard

Invece $\underline{w} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin \mathrm{Ker}(f)$ perché è un vettore normale al piano dato da $\mathrm{Ker} f$.

Poiché per hp. $f(\underline{w}) = 2\underline{w}$

In base $\mathcal{V} = \{ \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3 = \underline{w} \}$ la matrice rappresentativa di f è

$$M_{\mathcal{V}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

(ii) Ortonormalizzare $\mathcal{V}$ vuol dire semplicemente versorizzare i tre vettori, visto che $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono già ortogonali. Pertanto il riferimento ortonormale $\mathcal{G}$ è:

$$\mathcal{G} := \left\{ \underline{g}_1 = \frac{\underline{v}_1}{|\underline{v}_1|} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{g}_2 = \underline{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{g}_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\underline{w}}{|\underline{w}|} \right\}$$

ed $M_{\mathcal{G}}(f)$ è sempre $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

(iii) Notiamo che $M_{\mathcal{E},\mathcal{G}} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ è matrice ortogonale perché $\mathcal{E}$ e $\mathcal{G}$ entrambi ortonormali $\Rightarrow M_{\mathcal{G},\mathcal{E}} = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}^{-1} = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}}^{t}$

dunque

$$M_{\mathcal{E}}(f) = M_{\mathcal{E},\mathcal{G}} \circ M_{\mathcal{G}}(f) \circ M_{\mathcal{G},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$