Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

I Appello - Giugno 2021

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **3 ore**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si è autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$, è assegnato un sistema di riferimento ortonormale reale. Si consideri il piano α, di equazione cartesiana

$$x_1 + 2ix_2 - x_3 + 1 = 0,$$

ed il piano β, di equazione cartesiana

$$4ix_2 - x_3 + 2 = 0.$$

Sia r la retta intersezione tra i piani α e β.
(i) Determinare tutti i punti reali di r e stabilire se la giacitura di r è reale.
(ii) Determinare equazioni cartesiane reali per il luogo dei punti reali del piano β.
(iii) Determinare le direzioni isotrope parallele al piano di equazione cartesiana $x_1 - x_3 = 0$.

Esercizio 2. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo la cui matrice rappresentativa nel riferimento canonico $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$A := M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 5 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & 3 \\ 3 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

(i) Verificare che -1 è autovalore per f e che $(1, 0, 1)$ è autovettore per f.

(ii) Determinare molteplicità algebrica e geometrica di ciascuno degli autovalori di f, ed una base dei relativi autospazi.

(iii) Determinare la forma canonica di Jordan J di A e determinare inoltre una matrice C non singolare tale che $C^{-1}AC = J$.

(iv) Si denoti con W l'autospazio di autovalore -1 per f. Determinare una base dello spazio vettoriale quoziente $\mathbb{R}^3/W$ e la matrice, rispetto a tale base, dell'endomorfismo $\overline{f} : \mathbb{R}^3/W \to \mathbb{R}^3/W$ indotto da f sul quoziente.

Esercizio 3. Nello spazio proiettivo numerico $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento proiettivo canonico e coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti $A = [1, 0, 0, 1]$, $B = [-1, 1, 1, 1]$ e la retta r, congiungente A e B. Si denotino con $[u_0, u_1, u_2, u_3]$ le coordinate omogenee duali in $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$.
(i) Stabilire se la retta r é contenuta nel piano di equazione cartesiana $x_0+x_1+x_2-x_3 = 0$ e determinare equazioni omogenee parametriche e cartesiane della retta r.
(ii) Stabilire se la retta $r^* \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$, duale della retta $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$, passa per il punto $P = [1, 1, 1, -1] \in (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ e se é contenuta nel piano $\beta \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ di equazione cartesiana $u_1 + u_2 + 2u_3 = 0$.
(iii) Determinare dimensione ed equazioni omogenee parametriche e cartesiane nelle coordinate duali di $(\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ del sottospazio proiettivo $Z(r) \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^*$ descrivente la stella di iperpiani di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$ di centro $r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 1

(i) La retta r è intersezione dei piani:

$$(*)\begin{cases} x_1 + 2i x_2 - x_3 + 1 = 0 & \alpha \\ 4i x_2 - x_3 + 2 = 0 & \beta \end{cases}$$

I punti reali di r formano l'intersezione tra r e la sua coniugata $\bar{r} = \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$. Studio pertanto l'intersezione $\alpha \cap \beta \cap \bar{\alpha} \cap \bar{\beta}$ descritta da un sistema lineare equivalente al sistema la cui matrice si ottiene separando parte reale e parte immaginaria dei coefficienti delle equazioni dei piani:

$$\begin{array}{c} \mathrm{Re}\,\alpha \\ \mathrm{Im}\,\alpha \\ \mathrm{Re}\,\beta \\ \mathrm{Im}\,\beta \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Tale matrice ha rg 3: le prime 3 righe formano matrice a scala con 3 pivot, mentre la quarta è proporzionale alla seconda.

Il sistema, di rango 3 in 3 indeterminate, è quindi compatibile e ammette una unica soluzione.
$\Rightarrow$ r ha un unico punto reale, $A(1,0,2)$, le cui coordinate si ottengono risolvendo il sistema.

Poiché la matrice dei coefficienti ha anch'essa rango 3, la giacitura di r non è reale.

Alternativamente, è possibile ricavare l'equazione parametrica

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 2it \\ x_2 = 0 + t \\ x_3 = 2 + 4it \end{cases}$$

Il vettore direttore ha componenti $(2i, 1, 4i)$ e non è multiplo di vettori reali.

(ii) Il piano β non è reale, ma contiene il punto reale $A(1,0,2)$, punto visto in A. $\Rightarrow \beta$ contiene almeno un punto reale e il luogo di punti reali di β è quindi una retta e coincide con $\beta \cap \bar{\beta}$.

Come equazioni reali, è sufficiente considerare

$$\begin{cases} -x_3 + 2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases}$$

ottenute separando parte reale e parte immaginaria nelle equazioni di π.

(iii) I vettori isotropi paralleli a $x_1 - x_3 = 0$ hanno componenti (l, m, n) tali che:

$$\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 0 \\ l - n = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2 + 2n^2 = 0 \\ l = n \end{cases} \qquad \begin{cases} m^2 = -2n^2 \\ l = n \end{cases}$$

$$\begin{cases} m = \pm i\sqrt{2}\, n \\ l = n \end{cases}$$

le direzioni isotrope cercate hanno coordinate descritte da:

$$\{(1, i\sqrt{2}, 1)\, t \mid t \in \mathbb{C}\} \cup \{(1, -i\sqrt{2}, 1)\, t \mid t \in \mathbb{C}\}.$$

Esercizio 3 i) verifico che -1 è autovalore per f

$$A+I = \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ -3 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 & 3 & -3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix} \text{ rg } 2$$

$A+I$ ha rango 2 $\Rightarrow$ -1 è autovalore per A.
svolgo subito alcune considerazioni utili per il punto successivo
L'autospazio di -1 ha dimensione $3-2=1$.
Le sue equazioni sono (a meno di fattori scalari non nulli)

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

e una soluzione non nulla

si ottiene considerando i minori 2×2 con segno alterno

$$\left(\det\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}, -\det\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \det\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = (2, -2, 2)$$

$\Rightarrow$ posto $\underline{w}_1 = (1,-1,1)$, l'autospazio di f di autovalore -1

è generato da $\underline{w}_1$.

. Verifico che $(1,0,1) \overset{def}{=} w_2$ è autovettore per f

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{w}_2 \text{ è autovettore per } f \text{ di autovalore } 2.$$

ii) abbiamo già osservato nel punto precedente che -1 è autovettore per f e il suo autospazio ha dimensione 1 e è generato da $\underline{w}_1$. Poiché la molteplicità geometrica di un autovalore coincide con la dimensione dell'autospazio, ricaviamo che la molteplicità geometrica di -1 per f è 1.
Resta da determinare la molteplicità algebrica.

Sempre nel punto precedente, abbiamo osservato che 2 è autovalore per f e w_2 è un suo autovettore. Determiniamo molteplicità geometrica e una base per l'autospazio di 2.

$$A - 2I = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -3 \\ -3 & -3 & 3 \\ 3 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \text{ha rango } 1$$

$\Rightarrow$ la dimensione dell'autospazio di 2 (coincidente con la molteplicità geometrica di 2) è pari a $3-1=2$.

Per determinare una base dell'autospazio di autovalore 2 è sufficiente risolvere l'equazione $x_1 + x_2 - x_3 = 0$ (ho diviso per 3) e determinare una base dello spazio delle soluzioni.
Una base dell'autospazio di autovalore 2 è dunque data da

$$w_2 = (1,0,1) \quad , \quad w_3 = (0,1,1)$$

la molteplicità algebrica di 2 è almeno 2 (perché è $\geq$ molt. geometrica). Ma non può essere maggiore di 2, perché il polinomio caratteristico di f ha grado 3 e anche -1 è una sua soluzione. Dunque, 2 ha molteplicità algebrica 2 e -1 ha molteplicità algebrica 1.
Poiché il polinomio caratteristico è fattorizzabile su $\mathbb{R}$, e per ogni autovalore molteplicità algebrica e geometrica coincidono, allora f è diagonalizzabile.

iii) Per quanto osservato al punto precedente, f è diagonalizzabile $\Rightarrow$ la forma canonica di Jordan per f coincide con la sua forma diagonale. $\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$ è base per $\mathbb{R}^3$
Dunque: $J = \begin{pmatrix} -1 & & \\ & 2 & \\ & & 2 \end{pmatrix}$ è forma canonica di Jordan per f.

$\mathcal{B} = \{w_1, w_2, w_3\}$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[r] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \arrow[r, "f"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{E}} \arrow[r, "id"] \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_{\mathcal{E}}"] & \mathbb{R}^3_{\mathcal{B}} \arrow[d, leftrightarrow, "\varphi_{\mathcal{B}}"] \\
\mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_C"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_A"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[r, "L_{C^{-1}}"'] & \mathbb{R}^3
\end{tikzcd}$$

$\varphi_{\mathcal{E}}$ = identificazione con $\mathbb{R}^3$ data dalla base $\mathcal{E}$

$$C = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = C^{-1} A C = J$$

iv) una base per $\mathbb{R}^3/_W$ è data da $\{[w_2], [w_3]\} = \overline{\mathcal{B}}$. $M_{\overline{\mathcal{B}}}(\overline{f}) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

perché $\overline{f}[w_2] = [f(w_2)] = [2w_2]$ e $\overline{f}[w_3] = [f(w_3)] = [2w_3]$.

Esercizio 3

(1) Poichè i punti $A, B \in \alpha$, chiaramente $r \subset \alpha$

Inoltre

$$r: \ \underline{X} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{cioè} \quad \begin{cases} x_0 = \lambda - \mu \\ x_1 = \mu \\ x_2 = \mu \\ x_3 = \lambda + \mu \end{cases} \qquad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

mentre $r: \begin{cases} x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

(2) Per il principio di dualità

$r^* \subset \beta \subset (\mathbb{P}^3_{\mathbb{R}})^* \Leftrightarrow \beta^* = [0, 1, 1, 2] \in r \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{R}}$

Visto che le equazioni parametriche di r sono date notiamo che il punto β^* corrisponde a $[\lambda, \mu] = [1, 1] \in \mathbb{P}^1$ pertanto $\beta^* \in r \Rightarrow r^* \subset \beta$

Per quanto riguarda $P = [1, 1, 1, -1]$ notiamo che $P = \alpha^*$

Visto che $r \subset \alpha \Rightarrow P = \alpha^* \in r^*$.

(3) $Z(r)$ è fascio di piani di centro r dunque $Z(r)$ è una retta in $(\mathbb{P}^3)^*$

Ora il fascio di piani di centro r in $\mathbb{P}^3$ è:

$$Z(r): \ \lambda(x_0 + x_1 + x_2 - x_3) + \mu(x_1 - x_2) = 0$$

quindi

$$\lambda x_0 + (\lambda + \mu) x_1 + (\lambda - \mu) x_2 - \lambda x_3 = 0$$

Le eq. parametriche di $Z(r) \subset (\mathbb{P}^3)^*$ sono

$$\begin{cases} u_0 = \lambda \\ u_1 = \lambda + \mu \\ u_2 = \lambda - \mu \\ u_3 = -\lambda \end{cases} \Rightarrow \underline{u} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto le eq. cartesiane di $Z(r) \subset (\mathbb{P}^3)^*$ sono date da

$$rg \begin{pmatrix} u_0 & u_1 & u_2 & u_3 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 2 \quad \rightsquigarrow \quad \begin{cases} u_0 + u_3 = 0 \\ u_1 + u_2 + 2u_3 = 0 \end{cases}$$