Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

I Prova di Appello - Gennaio 2021

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME & NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 30 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i seguenti fogli, spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si é autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o se si desidera il ritiro dalla prova; in entrambi i casi si abbandona l'aula)

COGNOME – NOME: ....

Esercizio 1. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo la cui matrice rappresentativa nel riferimento canonico $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e':

$$A := M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se f e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare dimensione, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di $Im(f)$.
(iii) Determinare dimensione, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di $Ker(f)$.
(iii) Dato il vettore numerico $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, stabilire se $\underline{b} \in Im(f)$. In caso affermativo, determinare equazioni parametriche per $\overset{\leftarrow}{f}(\underline{b})$, il sottospazio affine delle anti–immagini di $\underline{b}$ mediante f.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio vettoriale numerico reale ed euclideo $(\mathbb{R}^5, \times)$, dotato di riferimento canonico $\mathcal{E}$ e di prodotto scalare standard $\times$. Sia U il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 &= 0 \\ X_2 + X_4 - X_5 &= 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortogonale di U.

(ii) Determinare equazioni cartesiane ed una base ortogonale per il sottospazio $U^\perp$, il complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^5$

(iii) Denotato con $\mathcal{R}$ il riferimento ortogonale per $\mathbb{R}^5$, costituito dall'unione dei riferimenti ortogonali di U e di $U^\perp$ trovati in (i) ed (ii) rispettivamente, scrivere la matrice $M_{\mathcal{R}}(\pi_U)$ rappresentativa nel riferimento $\mathcal{R}$ dell'endomorfismo π_U di *proiezione ortogonale* sul sottospazio U.

Esercizio 3. Nel piano affine numerico $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano canonico $RC(O; x_1, x_2)$, é data l'applicazione $\phi : \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}} \to \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ definita da:

$$\phi \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Sia inoltre r la retta di equazione cartesiana $2x_1 + x_2 - 3 = 0$.

(i) Stabilire se ϕ e' un'automorfismo affine di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, i.e. se ϕ é un'affinitá invertibile. Trovare inoltre gli eventuali punti fissi di ϕ.

(ii) Determinare un vettore direttore della retta $\phi(r)$.

(iii) Trovare l'equazione cartesiana della retta ℓ, parallela a $\phi(r)$ e passante per il punto $Q = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 1

(i) $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ -1 & 5 & -9 \end{pmatrix} = -9 - 28 - (35 - 72) = -72 + 72 = 0$

$\Rightarrow$ f non è automorfismo

(ii) Poiché $\det\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} = 28 \neq 0 \Rightarrow rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}\, f) = 2$

$\mathrm{Im}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ -9 \end{pmatrix} \right\rangle \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = t + 7s \\ x_3 = 5t - 9s \end{cases}$ $t, s \in \mathbb{R}$ eq. parametriche

$\det\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & -9 \end{pmatrix} = 0$ eq. cartesiana

(iii) Per teorema del rango
$\dim(\mathrm{Ker}\, f) = 3 - 2 = 1$

$\mathrm{Ker}\, f = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\underline{x} = \underline{0} \}$, ma $rg(A) = 2$ e

$A(1,2|2,3)$ minore invertibile $\Rightarrow$ il S.L. $A\underline{x} = \underline{0}$ è equivalente a

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$\begin{cases} x_2 = x_3 = t \\ 2x_1 = -t - 7t = -8t \end{cases} \Rightarrow x_1 = -4t$ $\quad \mathrm{Ker}(f) = \left\langle \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle$

$\begin{cases} x_1 = 4t \\ x_2 = -t \\ x_3 = -t \end{cases}$ eq. param. $\quad rg\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix} = 2$ eq. cartesiane

(iv) Notiamo che $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{b} \in \langle \mathrm{Col}(A) \rangle = \mathrm{Im}(f)$

Pertanto $\overleftarrow{f}(\underline{b}) \neq \emptyset$

$\overleftarrow{f}(\underline{b}) = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid A\underline{x} = \underline{b} \} \Leftrightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \\ -1 & 5 & -9 & 4 \end{array}\right)$ è equivalente a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 7 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \leftrightarrow R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 7 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to R_2 - \frac{1}{2}R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 0 & \frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

(2)

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 = 5 \\ 7x_2 - 7x_3 = 1 \end{cases} \qquad \begin{aligned} x_3 &= t \\ x_2 &= \frac{1}{7} + t \\ x_1 &= 5 - 4\left(\frac{1}{7}+t\right) = \frac{31}{7} - 4t \end{aligned}$$

$$\underline{x} = \begin{pmatrix} \frac{31}{7} \\ \frac{1}{7} \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2)

(i) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 \to R_2 - R_1}$

$$\begin{pmatrix} 0 & \boxed{1} & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{-1} & -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad rg(A) = 2 \Rightarrow \dim(U) = 5 - 2 = 3$$

$$\begin{cases} x_5 = t \\ x_4 = s \\ x_3 = s - t \\ x_2 = t - s \\ x_1 = k \end{cases} \quad k, s, t \in \mathbb{R} \Rightarrow U = \left\langle \underline{u}_1 = \underline{e}_1, \ \underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$\underline{e}_1 \times \underline{u}_2 = \underline{e}_1 \times \underline{u}_3 = 0$ ma $\underline{u}_2 \times \underline{u}_3 = -1 - 1 = -2 \neq 0$

Prendo

$\underline{w}_2 := \underline{u}_2$

$$\underline{w}_3 := \underline{u}_3 - \pi_{\underline{w}_2}(\underline{u}_3) = \underline{u}_3 - \frac{(\underline{u}_3 \times \underline{w}_2)}{\|\underline{w}_2\|} \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{(-2)}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 + \frac{2}{3} \\ 1 - \frac{2}{3} \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 1 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Pertanto

$$U = \left\langle \underline{w}_1 = \underline{e}_1, \ \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle$$

è la base ortogonale richiesta

(ii) $\dim(U^\perp) = 5 - \dim(U) = 5 - 3 = 2$ e poiché

$$U: \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_4 - x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \left\langle \underline{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \underline{b}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = U^\perp$$

$\underline{b}_4 \cdot \underline{b}_5 = 1 \neq 0$

$\underline{w}_4 := \underline{b}_4$

$$\underline{w}_5 := \underline{b}_5 - \pi_{\underline{w}_4}(\underline{b}_5) = \underline{b}_5 - \frac{(\underline{b}_4 \times \underline{b}_5)}{\|\underline{b}_4\|}\underline{b}_4 =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{(1)}{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1-1/2 \\ 0+1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

(iii) $\mathcal{R} = \{\underline{w}_1, \underline{w}_2, \underline{w}_3, \underline{w}_4, \underline{w}_5\}$

Poiché π_U è t.c.

$$Im(\pi_U) = U$$
$$Ker(\pi_U) = U^\perp$$

$$\Rightarrow M_{\mathcal{R}}(\pi_U) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

(i) $\phi(\underline{x}) = A\underline{x} + \underline{c}$ dove $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = 1+4 = 5 \neq 0$

$\Rightarrow \phi$ è automorfismo affine

I punti fissi sono dati da

$$A\underline{x} + \underline{c} = \underline{x} \iff (A - I_2)\underline{x} + \underline{c} = \underline{0} \iff$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 2x_2 = -1 \\ -2x_1 = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

L'unico pto fisso di ϕ è $H = \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(ii) r ha vettore direttore $\underline{r} := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\phi(r)$ avrà vettore direttore $\phi_\ell(\underline{r}) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\sim \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

(iii) Per trovare l'equazione cartesiana di ℓ considero

$$\det \begin{pmatrix} x_1 - 1 & x_2 - 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = 0$$

$$4x_1 - 4 - 3x_2 + 3 = 0$$

$$\boxed{4x_1 - 3x_2 - 1 = 0}$$