

Esercizio 1

- (i) π ha punto improprio $C=[0,2,1] \in \{x_0=0\}$
 pertanto $\mathcal{F}$ è semplicemente il fascio a centro C di rette proiettive
 Una di queste rette è $x_0=0$, l'altra è $\pi: 3x_0 - x_1 + 2x_2 = 0$

Pertanto

$$\overline{\mathcal{F}}: \lambda x_0 + \mu(3x_0 - x_1 + 2x_2) = 0$$

i.e. $(\lambda + 3\mu)x_0 - \mu x_1 + 2\mu x_2 = 0, [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$

- (ii) Dal punto precedente, se $[u_0, u_1, u_2]$ coordinate duali in $(\mathbb{P}_{\mathbb{R}}^2)^V$
 le equazioni parametriche di $\pi_{\overline{\mathcal{F}}}$ sono

$$u_0 = \lambda + 3\mu, \quad u_1 = -\mu, \quad u_2 = 2\mu \quad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1$$

pertanto $\sqrt{\mathcal{F}}: 2u_1 + u_2 = 0$

- (iii) Se $u = \frac{x_0}{x_1}, v = \frac{x_2}{x_1} \Rightarrow \pi_1: 3u + 2v - 1 = 0$ e punto improprio $[2, 0, -3]$

Se $z = \frac{x_0}{x_2}, w = \frac{x_1}{x_2} \Rightarrow \pi_2: 3z - w + 2 = 0$ e punto improprio $[1, 3, 0]$



Esercizio 2

- (i) $\varphi(\underline{v}, \underline{v}) = 25 \neq 0 \Rightarrow \underline{v}$ non è φ -isotropo

(ii) Poiché $\varphi(\underline{e}_2, \underline{v}) \neq 0$ si ha $\underline{y}' = \frac{\varphi(\underline{e}_2, \underline{v})}{\varphi(\underline{v}, \underline{v})} \underline{v} = \frac{1}{5} \underline{v} = \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix}$

Per avere $\underline{y}'' \in C$ $\begin{cases} \underline{y}' + \underline{y}'' = \underline{e}_2 \\ \underline{y}'' = \underline{e}_2 - \underline{y}' = \underline{e}_2 - \frac{1}{5} \underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1/5 \\ 3/5 \\ 2/5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 2/5 \\ -2/5 \end{pmatrix} \end{cases}$

(iii) $\underline{e}_2^{\perp \varphi} = \langle \underline{e}_2 \rangle^{\perp \varphi} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \varphi(\underline{x}, \underline{e}_2) = 0 = \underline{x}^t M_{\underline{e}}(\varphi) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \}$

e si ottiene $(x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0$

Esercizio 3

(1) T ha matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = 0 \quad \text{e} \quad \det \begin{pmatrix} -1 & -1/2 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} \neq 0$$

$\Rightarrow \text{rg}(T) = 2 \Rightarrow T$ è semplicemente degenera

Le forme canoniche di coniche semplicemente degeneri

sono

$$y_0^2 + y_1^2 = 0$$

$$\text{oppure } y_0^2 - y_1^2 = 0$$

↓
punti forme

↓
2 punti reali

Poiché $[0, 0, 1], [1, 1, 1] \in T \Rightarrow$ necessariamente $\bar{T}$ è semplicemente degenera 2 punti reali $\Rightarrow y_0^2 - y_1^2 = 0$ è f.c.

(2) $\text{Sing}(T) = \{P\}$ visto che $T = l_1 + l_2$

$$P \text{ è dato da } \ker(A) = \begin{cases} x_0 + 1/2 x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 + x_2 = 0 \\ x_0 - x_1 = 0 \end{cases}$$

$P = [1, 1, -2]$ e le precedenti sono equazioni cartesiane

(3) Poiché $Q = [2, -1, -1] \in T$ ma $Q \neq P \Rightarrow Q \in T \setminus \text{Sing} T$

Pertanto Q appartiene ad una ed una sola delle componenti irriducibili l_1 o l_2 di T . Essendo retta in T , la

componente irriducibile di T contenente Q sarà

la retta tangente $T_Q(T)$ cercata. Per trovare eq. cartesiana

completiamo

$$(2 \ -1 \ -1) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$$

che fornisce $x_0 + x_1 + x_2 = 0$. Detta $f(x) = 0$ eq. cartesiana di T

$$\text{si ha infatti } f(x) = (x_0 + x_1 + x_2) \cdot (x_0 - x_1) = 0$$

↓
 l_1

↓
 l_2