**Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"**
**Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021**
Corso: Geometria 2 con Elementi di Storia 2
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

**I Prova di Esonero**

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME
- Svolgere i quesiti proposti in **2 ore e 15 minuti**
- Consegnare **esclusivamente** i fogli spillati dal docente
- Non lasciare parti scritte a matita, non utilizzare penna rossa
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.
- Durante lo svolgimento della prova, non si e' autorizzati ad uscire dall'aula (salvo che per motivi di salute o ci si ritira, in entrambi i casi si abbandona l'aula)

**COGNOME NOME:** SVOLGIMENTO

**Esercizio 1.** Nello spazio euclideo complessificato $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$, sia fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R} = R(O; x_1, x_2, x_3)$ cartesiano ortonormale reale. Sia dato il piano $\pi$ che, in tale riferimento, ha equazione cartesiana:

$$\pi : x_1 - (1+i)x_2 + (1-i)x_3 - 3 = 0.$$

(i) Stabilire se $\pi$ e' un piano isotropo.

(ii) Stabilire se, per ogni punto $P \in \pi$, esiste esattamente una coppia di rette isotrope per $P$ contenute nel piano $\pi$.

(iii) Stabilire se il piano $\pi$ e' ortogonale ad almeno un piano isotropo passante per l'origine $O$ di $\mathbb{E}^3_{\mathbb{C}}$.

(1) I coefficienti $(a,b,c)$ del piano $\pi$ sono $(1, -(1+i), (1-i))$ quindi

$$1^2 + (-(1+i))^2 + (1-i)^2 = 1 \neq 0$$

pertanto $\pi$ non è isotropo

(2) La giacitura di $\pi$ è

$$\pi_0 : x_1 - (1+i)x_2 + (1-i)x_3 = 0$$

Cerchiamo quei vettori direttori $\underline{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \\ n \end{pmatrix}$ t.c. $\begin{cases} l^2 + m^2 + n^2 = 0 \\ l - (1+i)m + (1-i)n = 0 \end{cases}$

Poichè $l = (1+i)m - (1-i)n \Rightarrow$

$l^2 + m^2 + n^2 = ((1+i)m - (1-i)n)^2 + m^2 + n^2 = 0$ che diventa

$$(1+2i)m^2 - 4mn + (1-2i)n^2 = 0$$

Supponendo $n \neq 0$ (altrimenti $\underline{v} = \underline{0}$ ⨳) poniamo $t = \frac{m}{n}$ ottenendo l'equazione $(1+2i)t^2 - 4t + (1-2i) = 0$ che ha due soluzioni distinte

(3) Se $\alpha$ isotropo per $O \Rightarrow \alpha : ax_1 + bx_2 + cx_3 = 0$ con $a^2 + b^2 + c^2 = 0$.

Ora $\alpha$ è ortogonale a $\pi$ se e solo se, $a - b(1+i) + c(1-i) = 0$

Come prima $\begin{cases} a = b(1+i) - c(1-i) \\ a^2 + b^2 + c^2 = 0 \end{cases}$ fornisce soluzioni

**Esercizio 2.** Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata $x$ e di grado al piu' 4. Sia $U$ il sottospazio di $V$ definito dai polinomi $p(x) \in V$ t.c. $p(1) = p(2) = 0$.

(i) Stabilire se esiste un'applicazione lineare $\varphi : V/U \to \mathbb{R}^3$ che sia suriettiva.

(ii) Stabilire se i polinomi $x$ e $x^3$ di $V$ determinano la medesima classe laterale nello spazio vettoriale quoziente $V/U$.

(iii) Stabilire se, nello spazio vettoriale quoziente $V/U$, i vettori (classi laterali) $[x]$ e $[x^2+2]$ sono linearmente dipendenti.

(i) $p(x) \in U \iff p(x) = (x-1)(x-2)\cdot q(x)$, $q(x) \in \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$

Quindi $\dim(U) =$ TRE

Ma allora $\dim(V/U) =$ CINQUE MENO TRE = 2 < 3 = $\dim(\mathbb{R}^3)$

Non può esistere $\varphi$ suriettiva

(ii) $[x] = [x^3] \in V/U$ se, e solo se, in $V$ $x^3 - x \in U$

Ma $x^3 - x = x(x-1) \notin U$ perchè non si annulla in 2

(iii) Supponiamo

$$\alpha[x] + \beta[x^2+2] = [0] \iff$$

$q(x) := \alpha x + \beta x^2 + 2\beta \in U$ cioè $q(2) = q(1) = 0$

$$\begin{cases} q(1) = \alpha 1 + \beta \cdot 1 + 2\beta = \alpha + 3\beta = 0 \\ q(2) = 2\alpha + 4\beta + 2\beta = 2\alpha + 6\beta = 0 \end{cases}$$

Perciò per $\beta = t \in \mathbb{R}$ e $\alpha = -3t$ esistono soluzioni

Se $\beta = -1$ per esempio, $\alpha = 3$ e $3x - x^2 - 2 \in U$

Quindi $[x]$ e $[x^2+2]$ sono dipendenti in $V/U$

**Esercizio 3.** Si consideri lo spazio vettoriale numerico reale $\mathbb{R}^3$, munito di riferimento canonico $\mathcal{E}$. Sia $f \in End(\mathbb{R}^3)$ l'endomorfismo definito da:

$$f(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3,\ f(\underline{e}_2) = -3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + \underline{e}_3,\ f(\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3.$$

(i) Stabilire se il vettore $\underline{v} := \underline{e}_1 - \underline{e}_2$ e' autovettore di $f$ e determinare l'insieme delle controimmagini $f^{-1}(\underline{v})$.

(ii) Determinare il polinomio caratteristico ed il polinomio minimo di $f$.

(iii) Stabilire se $f$ e' diagonalizzabile; in caso di risposta affermativa, scrivere la forma diagonale di $f$ ed individuare una base diagonalizzante $f$.

Notiamo che

$$A := M_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(i) Ora $f(\underline{v}) = A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\,\underline{v}$ è autovettore di autovalore 2.

Siccome $rg(A) = 3 \Rightarrow f$ è automorfismo di $\mathbb{R}^3$

$\Rightarrow f^{-1}(\underline{v})$ è costituito da un unico vettore che è semplicemente $f^{-1}(\underline{v}) = \frac{1}{2}\underline{v}$, visto che $f(\frac{1}{2}\underline{v}) = 2 \cdot (\frac{1}{2}\underline{v}) = \underline{v}$

(ii) $P_f(t) = P_A(t) = \det(A - tI_3) = \det\begin{pmatrix} -1-t & -3 & 3 \\ 2 & 4-t & -3 \\ 1 & 1 & -1-t \end{pmatrix}$

$= (1-t^2) \cdot (t-2) = (1-t)(1+t)(t-2)$

Poichè $P_f(t)$ fornisce tre autovalori semplici, allora

$P_f(t) = m_f(t)$

(iii) Visto che $f$ ha tre autovalori semplici, $f$ è sicuramente diagonalizzabile, con forma diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

Per trovare il riferimento $\mathcal{V} = \{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ diagonalizzante è sufficiente considerare

$\langle \underline{v}_1 \rangle = A(f, 1) = \ker(A - 1I_3)$

$\langle \underline{v}_2 \rangle = A(f, -1) = \ker(A + 1I_3)$

$\langle \underline{v}_3 \rangle = A(f, 2) = \ker(A - 2I_3)$