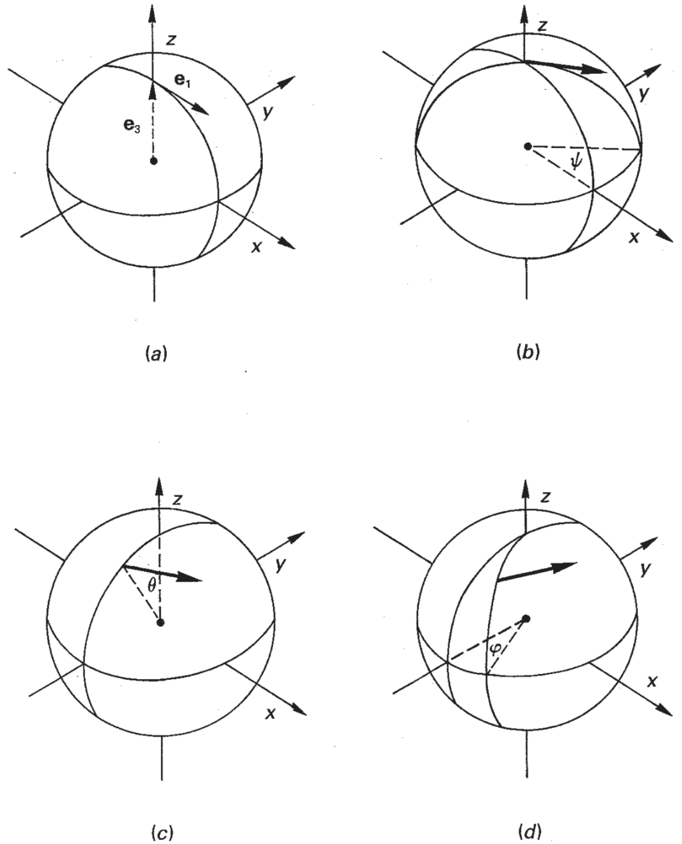

Figura 21.9

mentre

$$(\mathbf{Z}_\varphi \circ \mathbf{X}_\theta \circ \mathbf{Z}_\psi)(\mathbf{e}_3) = (\mathbf{Z}_\varphi \circ \mathbf{X}_\theta)(\mathbf{e}_3) = R(\mathbf{e}_3),$$

e quindi $\mathbf{Z}_\varphi \circ \mathbf{X}_\theta \circ \mathbf{Z}_\psi = R$.

Le figure 21.9*b*, *c*, *d* illustrano la successione delle trasformazioni effettuate.

Sia **E** uno spazio euclideo tridimensionale.

La classificazione delle isometrie di **E** è simile a quella data dal teorema 21.3 per le isometrie del piano. Oltre alle rotazioni, riflessioni e traslazioni, si hanno i seguenti altri tre tipi di isometrie.

Una *glissoriflessione* è definita come la composizione di una riflessione con una traslazione in una direzione parallela al piano di simmetria della riflessione.

Una *glissorotazione* è la composizione di una rotazione con una traslazione in una direzione parallela all'asse della rotazione.

Una *riflessione rotatoria* è la composizione di una rotazione con la riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse della rotazione.

Nel 1776 Eulero dimostrò che *ogni simmetria di* **E** *è di uno dei sei tipi che abbiamo descritto, e cioè le rotazioni, le traslazioni, le riflessioni, le glissoriflessioni, le glissorotazioni e le riflessioni rotatorie.*

Non daremo la dimostrazione di questo risultato. È abbastanza curioso il fatto che l'analogo, e più semplice, teorema 21.3 che classifica le isometrie piane sia stato dimostrato solo nel 1831, cioè cinquantacinque anni più tardi.

22 Diagonalizzazione di operatori simmetrici

Nelle pagine precedenti abbiamo introdotto due diverse relazioni di equivalenza tra matrici quadrate: la similitudine e la congruenza. Ricordiamo che due matrici A, $B \in M_n(\mathsf{K})$, $n \geq 1$, sono dette simili (rispettivamente congruenti) se esiste $M \in \mathrm{GL}_n(\mathsf{K})$ tale che $B = M^{-1}AM$ ($B = {}^t\!MAM$).

La similitudine è stata introdotta allo scopo di studiare le matrici che rappresentano un operatore su di uno spazio vettoriale rispetto a due diverse basi; la congruenza è stata invece definita per descrivere le matrici di una forma bilineare rispetto a basi diverse.

In corrispondenza alle due nozioni si hanno due diversi problemi di diagonalizzazione, che possono così enunciarsi: data $A \in M_n(\mathsf{K})$, trovare una matrice diagonale $B \in M_n(\mathsf{K})$ simile (oppure congruente) ad A.

Il secondo problema, quello dell'esistenza di matrici diagonali in una data classe di congruenza, equivalente al problema della diagonalizzazione delle forme bilineari, è risolubile se ci si limita a considerare forme bilineari simmetriche, e cioè matrici A simmetriche: è quanto afferma il teorema 16.1.

Come sappiamo, facili esempi mostrano che il primo dei due problemi non ammette soluzione in generale, cioè non tutte le classi di similitudine contengono una matrice diagonale (cfr. esempio 13.15(3)).

In questo paragrafo considereremo un'altra questione, più particolare ma molto importante in geometria euclidea, vale a dire il problema di diagonalizzare matrici simmetriche reali per mezzo di matrici ortogonali.

Se $A \in M_n(\mathsf{R})$ ed $M \in \mathrm{O}(n)$, si ha

$$M^{-1}AM = {}^t\!MAM \qquad [22.1]$$

e quindi la matrice [22.1] è simultaneamente simile e congruente ad A. Parlando di diagonalizzazione di una matrice per mezzo di matrici ortogonali, non è dunque necessario specificare se ci si riferisce alla similitudine o alla congruenza perché le due nozioni sono equivalenti. Il limitarsi a considerare le matrici $M \in \mathrm{O}(n)$

è equivalente a considerare, in uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita $\mathbf{V}$, solo basi ortonormali; quindi la diagonalizzabilità di una matrice simmetrica A per mezzo di matrici ortogonali significa che sia la forma quadratica definita da A che l'operatore di matrice A rispetto a una base ortonormale di $\mathbf{V}$ sono diagonalizzabili *in una base ortonormale.*

Una semplice, ma fondamentale, proprietà delle matrici simmetriche reali è descritta dal seguente lemma.

22.1 LEMMA *Il polinomio caratteristico di una matrice simmetrica $A \in M_n(\mathsf{R})$ possiede solo radici reali.*

Dimostrazione

Possiamo considerare A come una matrice di numeri complessi e quindi come un operatore T_A: $\mathsf{C}^n \to \mathsf{C}^n$. Sia $\lambda \in \mathsf{C}$ una radice del polinomio caratteristico di A, e sia $\mathbf{x} \in \mathsf{C}^n$ un corrispondente autovettore. Si ha

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}. \tag{22.2}$$

Prendendo i complessi coniugati di primo e secondo membro, si ha anche

$$A\overline{\mathbf{x}} = \overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}}. \tag{22.3}$$

Consideriamo lo scalare ${}^t\overline{\mathbf{x}}A\mathbf{x}$, e scriviamolo in due modi diversi utilizzando la [22.2] e la [22.3]:

$${}^t\overline{\mathbf{x}}A\mathbf{x} = {}^t\overline{\mathbf{x}}(A\mathbf{x}) = {}^t\overline{\mathbf{x}}\lambda\mathbf{x} = \lambda\,{}^t\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x} \tag{22.4}$$

$${}^t\overline{\mathbf{x}}A\mathbf{x} = ({}^t\overline{\mathbf{x}}A)\,\mathbf{x} = {}^t(A\overline{\mathbf{x}})\,\mathbf{x} = {}^t(\overline{\lambda}\overline{\mathbf{x}})\,\mathbf{x} = \overline{\lambda}\,{}^t\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x}. \tag{22.5}$$

Osservando che

$${}^t\overline{\mathbf{x}}\mathbf{x} = \overline{x}_1x_1 + \overline{x}_2x_2 + \ldots + \overline{x}_nx_n$$

è un numero reale positivo, perché $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, dalle [22.4] e [22.5] deduciamo che $\lambda = \overline{\lambda}$, cioè che λ è reale.

22.2 TEOREMA (SPETTRALE) *Siano $\mathbf{V}$ uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita e T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operatore simmetrico. Esiste una base ortonormale di $\mathbf{V}$ rispetto alla quale la matrice che rappresenta T è diagonale.*

Dimostrazione

Procediamo per induzione su $n = \dim(\mathbf{V})$. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare; supponiamo quindi $n \geq 2$ e che il teorema sia vero per spazi di dimensione $n-1$. Poiché l'operatore T è simmetrico, il polinomio caratteristico di T possiede radici reali, per il lemma 22.1. Quindi T possiede un autovalore λ; sia $\mathbf{e}_1$ un corrispondente autovettore, che possiamo supporre di norma 1, e sia $\mathbf{U} = \mathbf{e}_1^{\perp}$ il complemento ortogonale di $\mathbf{e}_1$. Per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ si ha

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{e}_1\rangle = \langle \mathbf{u}, T(\mathbf{e}_1)\rangle = \langle \mathbf{u}, \lambda\mathbf{e}_1\rangle = \lambda\langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_1\rangle = \lambda 0 = 0,$$

e quindi $T(\mathbf{u}) \in \mathbf{U}$, cioè T induce un operatore $T_{\mathbf{U}}$: $\mathbf{U} \to \mathbf{U}$. Poiché $T_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}) = T(\mathbf{u})$ per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$, l'operatore $T_{\mathbf{U}}$ è simmetrico. Per l'ipotesi induttiva, $\mathbf{U}$ possiede una base ortonormale $\{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ che diagonalizza $T_{\mathbf{U}}$. Allora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}$ che diagonalizza T.

Il teorema spettrale può enunciarsi nella forma equivalente seguente.

22.3 TEOREMA *Per ogni matrice simmetrica reale $A \in M_n(\mathsf{R})$ esiste una matrice ortogonale $M \in \mathrm{O}(n)$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale.*

Dimostrazione

A è la matrice di un operatore simmetrico T_A di R^n rispetto alla base canonica. Dal teorema spettrale segue che T_A è diagonalizzabile in una base ortonormale, e quindi l'asserto.

Un enunciato equivalente del teorema spettrale si può dare in termini di forme quadratiche:

22.4 TEOREMA *Per ogni forma quadratica q: $\mathbf{V} \to \mathsf{R}$ su uno spazio vettoriale euclideo di dimensione finita, esiste una base ortonormale diagonalizzante.*

La dimostrazione del teorema 22.4 è simile alla precedente ed è lasciata al lettore.

La principale applicazione geometrica del teorema spettrale è un elegante teorema di classificazione delle coniche euclidee, che dimostreremo nel capitolo 4, e più in generale un teorema di classificazione delle quadriche in uno spazio euclideo di dimensione qualunque.

Il seguente risultato è implicito nel teorema 22.2 nel caso finito-dimensionale:

22.5 PROPOSIZIONE *Sia T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operatore simmetrico sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbf{V}$. Se λ, μ sono due autovalori distinti di T, ogni autovettore relativo a λ è ortogonale ad ogni autovettore relativo a μ.*

Dimostrazione

Siano $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ autovettori relativi a λ e a μ rispettivamente. Si ha:

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle \qquad \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{w})\rangle = \langle \mathbf{v}, \mu\mathbf{w}\rangle = \mu\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle$$

e, poiché T è simmetrico, si deduce che

$$\lambda\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = \mu\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle.$$

Poiché $\lambda \neq \mu$, si deve avere $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w}\rangle = 0$.

22.7 *Complementi*

1. Come abbiamo ricordato all'inizio di questo paragrafo, non tutte le matrici $A \in M_n(\mathsf{K})$ sono simili a una matrice diagonale. Tale circostanza fa sorgere il problema di trovare una classe di matrici, da chiamarsi *forme canoniche*, il più possibile semplici, tra le quali rientrino le matrici diagonali come casi particolari, e tali che ogni classe di similitudine ne contenga una. Tali matrici, se esistessero, potrebbero essere prese come rappresentanti delle classi di similitudine, e quindi fornirne una classificazione esplicita. Tra tutte le soluzioni note di questo problema la più importante è la cosiddetta *forma canonica di Jordan*, a cui accenneremo brevemente, rinviando il lettore a testi specializzati di algebra lineare per le dimostrazioni (cfr. ad esempio [6]).

Un *blocco di Jordan di ordine n* è una matrice $n \times n$ a elementi in K della forma

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 1 & \lambda & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

per qualche $\lambda \in \mathsf{K}$. Denoteremo un blocco di Jordan siffatto con il simbolo $J_{n,\lambda}$.

Una matrice $A \in M_n(\mathsf{K})$ si dice in *forma canonica di Jordan* se è della forma seguente:

$$A = \begin{pmatrix} J_{n_1,\lambda_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & J_{n_2,\lambda_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & J_{n_k,\lambda_k} \end{pmatrix}$$

per opportuni interi positivi $n_1, \dots, n_k$ tali che $n_1 + \dots + n_k = n$, e $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathsf{K}$. Si dimostra facilmente che gli scalari $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ sono gli autovalori di A.

Se, in particolare, $k = n$ ed $n_j = 1$ per ogni $j = 1, \dots, n$, allora $A = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots$ $\dots, \lambda_n)$ è una matrice diagonale.

Si ha il seguente risultato:

TEOREMA DI JORDAN *Supponiamo* K *algebricamente chiuso. Sia* **V** *un* K*-spazio vettoriale di dimensione finita, e sia* T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un operatore. Esiste una base* **e** *di* **V** *tale che la matrice* $M_{\mathbf{e}}(T)$ *sia in forma canonica di Jordan.*

Una conseguenza immediata del teorema di Jordan è che ogni $M \in M_n(\mathsf{K})$ è simile a una matrice in forma canonica di Jordan.

Esercizi

1. In ciascuno dei casi seguenti determinare una matrice $M \in SO(2)$ che diagonalizzi la matrice simmetrica assegnata:

a) $\begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 5 & -13 \\ -13 & 5 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 7 & -2 \\ -2 & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$.

2. In ciascuno dei seguenti casi determinare una trasformazione ortogonale di $\mathbf{R}^3$ che diagonalizzi la forma quadratica assegnata:

a) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2^2 + 2x_2x_3 + 2x_3^2$

b) $q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2^2 - 2x_2x_3 - 2x_3^2$

c) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_1x_3 - x_2^2 + x_3^2$

e trovarne la corrispondente forma diagonale.

3. Dimostrare che se $A \in M_n(\mathsf{R})$ è una matrice antisimmetrica, ogni radice non nulla del suo polinomio caratteristico è un numero complesso puramente immaginario.

23 Il caso complesso

Abbiamo visto che in uno spazio vettoriale euclideo è possibile definire tutti i concetti di natura metrica della geometria euclidea utilizzando il prodotto scalare. In un campo K diverso da R in generale non ha senso parlare di positività e quindi non è possibile introdurre la nozione di prodotto scalare in uno spazio vettoriale su un campo qualsiasi. Nel caso K = C è però possibile aggirare questa difficoltà in un modo molto semplice, modificando la definizione di forma bilineare simmetrica in quella di "forma hermitiana".

23.1 DEFINIZIONE *Sia* **V** *uno spazio vettoriale su* C. *Un'applicazione* h: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{C}$ *è una* forma hermitiana *su* **V** *se soddisfa le seguenti condizioni:*

$$h(\mathbf{v} + \mathbf{v}', \mathbf{w}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + h(\mathbf{v}', \mathbf{w}) \qquad [23.1]$$

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w} + \mathbf{w}') = h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + h(\mathbf{v}, \mathbf{w}') \qquad [23.2]$$

$$h(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = c\, h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad [23.3]$$

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \overline{h(\mathbf{w}, \mathbf{v})}. \qquad [23.4]$$

La [23.1] e la [23.3], insieme, affermano che $h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è C-lineare in $\mathbf{v}$, mentre la [23.2] afferma che $h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è additiva in $\mathbf{w}$. Dalla [23.4] deduciamo che si ha

$$h(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = \overline{h(c\mathbf{w}, \mathbf{v})} = \overline{c}\overline{h(\mathbf{w}, \mathbf{v})} = \overline{c}h(\mathbf{v}, \mathbf{w}). \qquad [23.5]$$

La [23.2] e la [23.4] insieme ci dicono quindi che $h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ è antilineare in $\mathbf{w}$ (cfr. complemento 11.14(3)).

Dalla [23.4] segue anche che $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \in \mathsf{R}$ per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.

La forma hermitiana h si dice *semidefinita positiva* (*semidefinita negativa*) se $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq 0$ ($h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \leq 0$) per ogni $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$; h si dice *definita positiva* (*definita negativa*) se $h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) > 0$ ($h(\mathbf{v}, \mathbf{v}) < 0$) per ogni $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.

Supponiamo che $\mathbf{V}$ abbia dimensione finita e sia $\boldsymbol{e} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una sua base. Per ogni $1 \leq i, j \leq n$ poniamo $h_{ij} = h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$. La matrice

$$H = (h_{ij}) \in M_n(\mathsf{C})$$

è detta la *matrice che rappresenta h rispetto alla base* $\boldsymbol{e}$. Per la [23.4] si ha

$$h_{ji} = \overline{h}_{ij} \quad \text{per ogni } 1 \leq i, j \leq n,$$

ovvero $H = {}^t\overline{H}$.

Una *matrice* $H \in M_n(\mathsf{C})$ tale che $H = {}^t\overline{H}$ si dice *hermitiana*. Quindi la matrice che rappresenta una forma hermitiana rispetto a una qualunque base è una matrice hermitiana. Si noti che se la matrice H è hermitiana, allora in particolare $h_{ii} \in \mathsf{R}$ per ogni $i = 1, \ldots, n$. Se H è simmetrica a elementi reali, allora è hermitiana.

Come nel caso delle forme bilineari, la matrice di una forma hermitiana rispetto a una base $\boldsymbol{e}$ determina la forma. Infatti, per ogni

$$\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \quad \mathbf{w} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \qquad [23.6]$$

si ha

$$\begin{aligned} h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= h(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = \\ &= \Sigma_{ij}x_i\overline{y}_j h(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = {}^t\mathbf{x}H\overline{\mathbf{y}}. \end{aligned}$$

Viceversa, data una matrice hermitiana $H \in M_n(\mathsf{C})$ e una base $\boldsymbol{e}$ di $\mathbf{V}$, ponendo

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = {}^t\mathbf{x}H\overline{\mathbf{y}}$$

per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ come in [23.6], si definisce una forma hermitiana su $\mathbf{V}$. La verifica è lasciata al lettore.

Nel caso particolare in cui H è la matrice nulla, si ottiene corrispondentemente la *forma hermitiana nulla*: $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$ per ogni $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Molte definizioni e risultati dimostrati in precedenza per le forme bilineari simmetriche si estendono al caso delle forme hermitiane.

Due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ si dicono *ortogonali* o *perpendicolari* se $h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Se $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$, definiamo

$$\mathbf{S}^\perp = \{\mathbf{w} \in \mathbf{V}: \mathbf{w} \text{ è ortogonale ad ogni } \mathbf{v} \in \mathbf{S}\}$$

e chiamiamo $\mathbf{S}^\perp$ *sottospazio ortogonale a* $\mathbf{S}$; si verifica immediatamente che $\mathbf{S}^\perp$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbf{V}$.

Una base $\boldsymbol{e} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ di $\mathbf{V}$ si dice *diagonalizzante* o *ortogonale* per h se i vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono a due a due ortogonali.

23.2 Teorema *Sia* $\mathbf{V}$ *uno spazio vettoriale complesso di dimensione finita maggiore di zero, e sia h una forma hermitiana su* $\mathbf{V}$. *Esiste in* $\mathbf{V}$ *una base diagonalizzante per h.*

Lasciamo al lettore il compito di dimostrare il teorema 23.2 adattando opportunamente le dimostrazioni dell'analogo teorema 16.1.

Il caso più importante che verrà esaminato è quello in cui h è definita positiva. Una forma hermitiana h definita positiva sarà anche chiamata *prodotto hermitiano* su $\mathbf{V}$. Uno spazio vettoriale complesso su cui è assegnato un prodotto hermitiano si dice *spazio vettoriale hermitiano*.

Ponendo

$$h(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \overline{\mathbf{y}} = x_1\overline{y}_1 + x_2\overline{y}_2 + \ldots + x_n\overline{y}_n \qquad [23.7]$$

si definisce un prodotto hermitiano su C^n, il *prodotto hermitiano standard*. La verifica del fatto che la [23.7] è un prodotto hermitiano è lasciata al lettore. C^n dotato del prodotto hermitiano standard è detto *n-spazio vettoriale hermitiano*.

Gli spazi vettoriali hermitiani sono l'analogo complesso degli spazi vettoriali euclidei e la teoria sviluppata in quel caso si generalizza ad essi con pochi cambiamenti. Ad esempio, in uno spazio vettoriale hermitiano le nozioni di *norma*, o *lunghezza, di un vettore*, di *coefficiente di Fourier* e di *proiezione di un vettore lungo la direzione di un vettore non nullo* si definiscono esattamente come in uno spazio euclideo.

Conseguentemente la nozione di *base ortonormale* si dà come nel caso euclideo. Dal teorema 23.2 discende immediatamente l'esistenza di una base ortonormale, che si ottiene a partire da una base ortogonale normalizzandone gli elementi, cioè dividendo ogni vettore della base per la sua norma. Il *procedimento di Gram-Schmidt* si estende senza cambiamenti agli spazi vettoriali hermitiani.

Fissiamo uno spazio vettoriale hermitiano $\mathbf{V}$ di dimensione finita, e denotiamo con $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ il prodotto hermitiano di due vettori.

Se $\boldsymbol{e} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}$, la matrice che rappresenta il prodotto hermitiano rispetto ad $\boldsymbol{e}$ è $\mathbf{I}_n$. Pertanto il prodotto hermitiano di due vettori $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{w} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n$ è

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = {}^t\mathbf{x}\overline{\mathbf{y}},$$

cioè uguaglia il prodotto hermitiano standard delle loro coordinate.

Anche la disuguaglianza di Schwarz si estende agli spazi vettoriali hermitiani, ma la dimostrazione è un po' diversa dal caso euclideo.

23.3 Teorema (Disuguaglianza di Schwarz) *Per ogni* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ *si ha*

$$|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| \le \|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| \qquad [23.8]$$

e vale l'uguaglianza se e solo se $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono paralleli.*

Dimostrazione

Se $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ la [23.8] è ovvia. Possiamo quindi supporre $\mathbf{w} \ne \mathbf{0}$. Per ogni a, $b \in \mathbf{C}$ si ha

$$0 \le \langle a\mathbf{v} + b\mathbf{w}, a\mathbf{v} + b\mathbf{w} \rangle = \langle a\mathbf{v}, a\mathbf{v} \rangle + \langle a\mathbf{v}, b\mathbf{w} \rangle + \langle b\mathbf{w}, a\mathbf{v} \rangle + \langle b\mathbf{w}, b\mathbf{w} \rangle =$$
$$= a\bar{a}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + a\bar{b}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \bar{a}b\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + b\bar{b}\langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle.$$

Sostituendo i valori $a = \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$ e $b = -\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ si ottiene

$$0 \le \|\mathbf{w}\|^4 \|\mathbf{v}\|^2 - 2\|\mathbf{w}\|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} + \|\mathbf{w}\|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle}.$$

Poiché $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} = |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|^2$, si ha

$$\|\mathbf{w}\|^2 |\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|^2 \le \|\mathbf{w}\|^4 \|\mathbf{v}\|^2$$

e dividendo per $\|\mathbf{w}\|^2$ si ottiene la [23.8]. L'uguaglianza è vera se e solo se $a\mathbf{v} + b\mathbf{w} = \mathbf{0}$, che è soddisfatta se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ sono proporzionali.

La norma dei vettori gode delle proprietà N1, N2, N3 (cfr. § 17). La N1 è ovvia e la N2 segue dall'identità

$$\langle r\mathbf{v}, r\mathbf{v} \rangle = |r|^2 \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

La N3 è la *disuguaglianza triangolare* e si dimostra nel seguente modo. Esplicitiamo

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 = \langle \mathbf{v} + \mathbf{w}, \mathbf{v} + \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle$$

e osserviamo che

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle + \overline{\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle} \le 2|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle|.$$

Utilizzando la [23.8] otteniamo quindi

$$\|\mathbf{v} + \mathbf{w}\|^2 \le \|\mathbf{v}\|^2 + 2|\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle| + \|\mathbf{w}\|^2 \le$$
$$\le \|\mathbf{v}\|^2 + 2\|\mathbf{v}\| \, \|\mathbf{w}\| + \|\mathbf{w}\|^2 = (\|\mathbf{v}\| + \|\mathbf{w}\|)^2,$$

cioè la N3.

23.4 Definizione *Un* operatore $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *si dice* unitario *se soddisfa la condizione*

$$\langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \quad \textit{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

Abbiamo il seguente risultato, del tutto simile al teorema 20.1, che caratterizza gli operatori unitari:

23.5 Teorema *Sia* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un'applicazione. Le seguenti condizioni sono equivalenti:*

1) T *è un operatore unitario.*
2) T *è un operatore tale che* $\|T(\mathbf{v})\| = \|\mathbf{v}\|$ *per ogni* $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$.
3) $T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ *e* $\|T(\mathbf{v}) - T(\mathbf{w})\| = \|\mathbf{v} - \mathbf{w}\|$ *per ogni* $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.
4) T *è un operatore e per ogni base ortonormale* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *di* $\mathbf{V}$, $\{T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)\}$ *è una base ortonormale.*
5) T *è un operatore ed esiste una base ortonormale* $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ *di* $\mathbf{V}$ *tale che* $\{T(\mathbf{e}_1), \dots, T(\mathbf{e}_n)\}$ *sia una base ortonormale.*

La dimostrazione del teorema 23.5 ricalca esattamente quella del teorema 20.1, cui rinviamo il lettore.

Si noti che dal teorema precedente segue che un operatore unitario T è invertibile, cioè $T \in GL(\mathbf{V})$.

23.6 Corollario *Sia* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *un operatore unitario.*

1) *Ogni autovalore* λ *di* T *è tale che* $|\lambda| = 1$.
2) *Se* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono due autovettori relativi ad autovalori distinti* λ, μ *rispettivamente, allora* $\mathbf{v}$ *e* $\mathbf{w}$ *sono perpendicolari.*

Dimostrazione

1) Sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ un autovettore relativo a λ. Si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \lambda\mathbf{v} \rangle = \lambda\bar{\lambda}\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Poiché $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \ne 0$, dev'essere $\lambda\bar{\lambda} = 1$, cioè $|\lambda| = 1$.

2) Si ha

$$\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle T(\mathbf{v}), T(\mathbf{w}) \rangle = \langle \lambda\mathbf{v}, \mu\mathbf{w} \rangle = \lambda\bar{\mu}\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle. \qquad [23.9]$$

Se $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle \ne 0$, dalla [23.9] segue $\lambda\bar{\mu} = 1$; ma si ha anche $\lambda\bar{\lambda} = 1$, e quindi $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$, cioè $\lambda = \mu$, che è contro l'ipotesi.

Gli operatori unitari sono strettamente in relazione con le matrici unitarie.

23.7 Corollario *Un operatore* $T: \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *è unitario se e solo se la matrice che rappresenta* T *in una qualunque base ortonormale di* $\mathbf{V}$ *è unitaria.*

Dimostrazione

Sia $\boldsymbol{e} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ una base ortonormale di $\mathbf{V}$, e sia $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{C})$ la matrice che rappresenta l'operatore T rispetto a $\boldsymbol{e}$. Allora T è unitario se e solo se si ha

$$\delta_{ij} = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle = \langle T(\mathbf{e}_i), T(\mathbf{e}_j) \rangle = {}^t A_{(i)} \bar{A}_{(j)}, \quad 1 \leq i, j \leq n,$$

dove $A_{(1)}, \ldots, A_{(n)}$ sono le colonne di A. Pertanto abbiamo ${}^t A \bar{A} = \mathbf{I}_n$, ovvero ${}^t \bar{A} A = \mathbf{I}_n$.

La principale differenza tra operatori unitari nel caso reale ed in quello complesso riguarda la loro diagonalizzabilità. Il risultato seguente vale infatti per gli operatori unitari complessi, ma non per quelli reali.

23.8 TEOREMA *Sia T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operatore unitario, e supponiamo* $\dim(\mathbf{V}) = n \geq 1$. *Esiste una base ortonormale di $\mathbf{V}$ che diagonalizza T.*

Dimostrazione

Per induzione su n. Se $n = 1$ non c'è niente da dimostrare. Supponiamo $n \geq 2$ e che il teorema sia vero per spazi di dimensione minore di n. Sia $\mathbf{e}_1 \in \mathbf{V}$ un autovettore di T e sia λ il relativo autovalore. Possiamo supporre $\|\mathbf{e}_1\| = 1$. Sia $\mathbf{U} = \mathbf{e}_1^{\perp}$. Poiché $\lambda \bar{\lambda} = 1$, per ogni $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$ si ha

$$\langle T(\mathbf{u}), \mathbf{e}_1 \rangle = \langle T(\mathbf{u}), \lambda \bar{\lambda} \mathbf{e}_1 \rangle = \lambda \langle T(\mathbf{u}), T(\mathbf{e}_1) \rangle = \lambda \langle \mathbf{u}, \mathbf{e}_1 \rangle = \lambda 0 = 0.$$

Quindi T trasforma $\mathbf{U}$ in sé stesso, e induce un operatore unitario

$$T_{\mathbf{U}}: \mathbf{U} \to \mathbf{U}.$$

Per l'ipotesi induttiva $\mathbf{U}$ possiede una base ortonormale $\{\mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ rispetto alla quale $T_{\mathbf{U}}$ è diagonale. Allora $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbf{V}$ che diagonalizza T.

Il teorema 23.8, tenuto conto del corollario 23.7, afferma in particolare la diagonalizzabilità di ogni matrice unitaria mediante una matrice unitaria. Precisamente si ha:

23.9 COROLLARIO *Per ogni $A \in \mathrm{U}(n)$ esiste $M \in \mathrm{U}(n)$ tale che $M^{-1}AM$ sia diagonale, o, equivalentemente, tale che $^*MAM$ sia diagonale.*

Dal corollario segue in particolare la diagonalizzabilità di ogni matrice $A \in \mathrm{O}(n)$. Si faccia però attenzione: una matrice ortogonale *non* è in generale diagonalizzabile per mezzo di matrici reali, perché non possiede, in generale, autovalori reali. Ad esempio le matrici $R_\theta \in \mathrm{O}(2)$, $0 < \theta < \pi$, non hanno autovalori reali.

23.10 DEFINIZIONE *Un* operatore T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ *si dice* hermitiano *se soddisfa la condizione*

$$\langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) \rangle \quad \textit{per ogni } \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}.$$

Supponiamo che $\boldsymbol{e} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ sia una base ortonormale di $\mathbf{V}$, e sia A la matrice che rappresenta un operatore hermitiano T rispetto a $\boldsymbol{e}$. Si ha, per ogni $\mathbf{v} = x_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + x_n \mathbf{e}_n$, $\mathbf{w} = y_1 \mathbf{e}_1 + \ldots + y_n \mathbf{e}_n$:

$$\begin{aligned} \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{w} \rangle &= {}^t(A\mathbf{x})\bar{\mathbf{y}} = {}^t\mathbf{x}{}^tA\bar{\mathbf{y}} \\ \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{w}) \rangle &= {}^t\mathbf{x}\overline{(A\mathbf{y})} = {}^t\mathbf{x}\bar{A}\bar{\mathbf{y}} \end{aligned} \qquad [23.10]$$

e quindi ${}^t\mathbf{x}{}^tA\bar{\mathbf{y}} = {}^t\mathbf{x}\bar{A}\bar{\mathbf{y}}$. Poiché quest'uguaglianza è vera per ogni $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbf{C}^n$, dev'essere ${}^tA = \bar{A}$, cioè A è una matrice hermitiana.

Se viceversa $A \in M_n(\mathbf{C})$ è una qualsiasi matrice hermitiana e T è l'operatore rappresentato da A nella base ortonormale $\boldsymbol{e}$, allora dalle [23.10] segue che T è hermitiano. Abbiamo pertanto la seguente proposizione:

23.11 PROPOSIZIONE *Un operatore T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ è hermitiano se e solo se la matrice A che rappresenta T rispetto a una qualunque base ortonormale è una matrice hermitiana.*

Gli operatori hermitiani sono gli analoghi, per gli spazi vettoriali hermitiani, degli operatori simmetrici nel caso euclideo. Abbiamo la seguente estensione del lemma 22.1:

23.12 LEMMA *Tutti gli autovalori di un operatore hermitiano T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ sono reali.*

Dimostrazione

Sia $\lambda \in \mathbf{C}$ un autovalore di T, e sia $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$ un autovettore relativo a λ. Si ha

$$\lambda \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle \lambda \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = \langle T(\mathbf{v}), \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, T(\mathbf{v}) \rangle = \langle \mathbf{v}, \lambda \mathbf{v} \rangle = \bar{\lambda} \langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle.$$

Poiché $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \neq 0$, si deduce che $\lambda = \bar{\lambda}$.

Il teorema spettrale, che abbiamo dimostrato per gli operatori simmetrici, si estende a quelli hermitiani:

23.13 TEOREMA (SPETTRALE) *Sia T: $\mathbf{V} \to \mathbf{V}$ un operatore hermitiano. Esiste una base ortonormale di $\mathbf{V}$ che diagonalizza T.*

La dimostrazione è identica a quella del teorema 22.2 e pertanto la omettiamo.

23.14 *Complementi*

Sia h: $\mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathbf{C}$ una forma hermitiana sullo spazio vettoriale complesso $\mathbf{V}$. Separando la parte reale da quella immaginaria, per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$ possiamo scrivere

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}\, a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

con $s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$, $a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathsf{R}$. Segue subito dalle [23.1] e [23.2] che $s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sono additive sia rispetto a $\mathbf{v}$ che a $\mathbf{w}$. Inoltre, per ogni $c \in \mathsf{R}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$, si ha

$$s(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}a(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = h(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ch(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = cs(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}ca(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

per la [23.3], e

$$s(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) + \mathrm{i}a(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = h(\mathbf{v}, c\mathbf{w}) = ch(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = cs(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}ca(\mathbf{v}, \mathbf{w}).$$

Quindi $s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ e $a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ sono due forme bilineari su $\mathbf{V}$ considerato come uno spazio vettoriale reale.

Per la [23.4] si ha anche

$$s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \mathrm{i}a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) - \mathrm{i}a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

e quindi

$$s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$a(\mathbf{w}, \mathbf{v}) = -a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$. Pertanto

$$s: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{R}$$

è una forma R-bilineare simmetrica, mentre

$$a: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{R}$$

è un forma R-bilineare antisimmetrica.

Inoltre, esplicitando le identità

$$h(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathrm{i}h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

$$h(\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = -\mathrm{i}h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

si ottiene

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -s(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) \qquad [23.11]$$

$$s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -a(\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) \qquad [23.12]$$

per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Infine, esplicitando l'identità

$$h(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = h(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

si ottiene

$$s(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad [23.13]$$

$$a(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \qquad [23.14]$$

per ogni $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$.

Dalla [23.11] segue che s individua a, mentre la [23.12] mostra che, d'altra parte, a individua s.

Viceversa, data una forma R-bilineare simmetrica $s: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{R}$ soddisfacente la [23.13], ponendo

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w})$$

si definisce una forma hermitiana $h: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{C}$. Verifichiamo la [23.3] e la [23.4]. Si ha, per ogni $c = a + \mathrm{i}b \in \mathsf{C}$, $\mathbf{v}$, $\mathbf{w} \in \mathbf{V}$:

$$\begin{aligned} h(c\mathbf{v}, \mathbf{w}) &= s(a\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(a\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) + s(\mathrm{i}b\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(\mathrm{i}b\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = \\ &= ah(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b[s(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w})] = \\ &= ah(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + b[s(-\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) + \mathrm{i}s(\mathbf{v}, \mathbf{w})] = \\ &= ah(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}bh(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = ch(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{aligned}$$

e la [23.3] è soddisfatta. Inoltre

$$\begin{aligned} h(\mathbf{w}, \mathbf{v}) &= s(\mathbf{w}, \mathbf{v}) + \mathrm{i}s(\mathbf{w}, \mathrm{i}\mathbf{v}) = s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \\ &= s(\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}s(-\mathbf{v}, \mathrm{i}\mathbf{w}) = \overline{h(\mathbf{v}, \mathbf{w})}, \end{aligned}$$

e anche la [23.4] è verificata.

In modo simile si dimostra che, data una forma R-bilineare antisimmetrica $a: \mathbf{V} \times \mathbf{V} \to \mathsf{R}$ soddisfacente la [23.14], ponendo

$$h(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = a(\mathrm{i}\mathbf{v}, \mathbf{w}) + \mathrm{i}a(\mathbf{v}, \mathbf{w})$$

si definisce una forma hermitiana su $\mathbf{V}$.

Riassumendo possiamo dire che assegnare una forma hermitiana sullo spazio vettoriale complesso $\mathbf{V}$ è equivalente ad assegnare su $\mathbf{V}$ una forma R-bilineare simmetrica soddisfacente la condizione [23.13], oppure una forma R-bilineare antisimmetrica soddisfacente la [23.14].

Esercizi

1. Stabilire quali delle seguenti sono forme hermitiane su C^2:

a) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + \mathrm{i}x_1\bar{y}_2 + \mathrm{i}x_2\bar{y}_1$ b) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \mathrm{i}\,|x_1|\,|y_1|$

c) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2\mathrm{i}x_1\bar{y}_2 - 2\mathrm{i}x_2\bar{y}_1$ d) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 1 + x_1\bar{y}_1 + x_1\bar{y}_2$

e) $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_1\bar{y}_1 + 2x_2\bar{y}_2$.

2. Stabilire quali delle seguenti matrici sono hermitiane:

a) $\begin{pmatrix} 1 & 1+\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix} \mathrm{i} & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 1 \end{pmatrix}$

e) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & i \\ 1 & 2 & 1+i \\ -i & 1-i & 0 \end{pmatrix}$ f) $\begin{pmatrix} i & 1 & i \\ -1 & 2 & 2i \\ -i & -2i & 0 \end{pmatrix}$.

3. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt, ortonormalizzare la seguente base di $\mathbf{C}^3$ rispetto al prodotto hermitiano standard:

$\boldsymbol{b} = \{(i, -i, 0), (0, i, 0), (0, i, i)\}$.

4. Per ciascuna delle seguenti matrici hermitiane A determinare una matrice unitaria M tale che $^*MAM$ sia diagonale:

a) $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{i}{2} \\ \frac{i}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$.

Capitolo 3
Geometria proiettiva

24 Spazi proiettivi

La geometria euclidea studia proprietà che, nella loro formulazione e dimostrazione, fanno ricorso a misurazioni e a confronto di lunghezze e di angoli. Anche nella geometria affine reale si ricorre a misurazioni, sebbene le distanze si confrontino solo lungo rette parallele. Per diversi secoli la geometria è stata studiata esclusivamente da un punto di vista metrico, e solo in tempi relativamente recenti ci si è accorti che esistono proprietà geometriche che possono essere formulate senza ricorrere a misurazioni o al confronto di grandezze. Alcune di queste proprietà vengono studiate dalla "geometria proiettiva".

Questa geometria ha le sue origini nelle regole della prospettiva, che gli artisti del Rinascimento (Brunelleschi, L.B. Alberti, Piero della Francesca e altri) studiarono scientificamente e utilizzarono in modo sistematico. Tali regole sono basate sull'idea di "punti di fuga", verso cui concorrono i contorni degli oggetti così come essi appaiono da un punto di osservazione.

Precursore della geometria proiettiva fu Girard Desargues (1593-1650), il quale per primo considerò rette e piani paralleli come casi particolari di rette e piani incidenti. La nascita della geometria proiettiva come una parte organica della matematica risale alla prima metà del secolo XIX con l'opera di Gaspard Monge (1746-1818) e di J.V. Poncelet (1788-1867). Gli spazi ambiente in cui essa viene studiata costituiscono un modello matematico astratto di spazio in cui valgono proprietà di natura grafica simili alle regole del disegno prospettico. Gli spazi proiettivi nascono dall'esigenza di una geometria da cui venga eliminata la nozione di parallelismo, che in geometria affine comporta il dover tenere conto di casi d'eccezione quando si considera l'intersezione di sottospazi. La geometria proiettiva consente inoltre di interpretare geometricamente e rendere più trasparenti certe parti dell'algebra lineare, come ad esempio la teoria dei sistemi di equazioni lineari omogenee.