sono nilpotenti. Dimostrare che, più in generale, ogni matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ strettamente triangolare (superiore o inferiore) è nilpotente.

9. Dimostrare che una matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ nilpotente non è invertibile.

10. Stabilire quali delle seguenti matrici sono ortogonali:

a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

d) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$ e) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$

f) $\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ g) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

h) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ i) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

j) $\begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{8}{9} & \frac{1}{9} & \frac{4}{9} \\ -\frac{4}{9} & \frac{4}{9} & \frac{7}{9} \end{pmatrix}$ k) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$.

11. Siano

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & b_n \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{K})$$

due matrici diagonali di ordine n. Dimostrare che

$$AB = BA = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 b_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_n b_n \end{pmatrix}.$$

3 Sistemi di equazioni lineari

Le matrici intervengono in modo naturale nello studio dei "sistemi di equazioni lineari".

Siano $X_1, \dots, X_n$ indeterminate. Un'*equazione lineare* (o *di primo grado*) nelle incognite $X_1, \dots, X_n$ a coefficienti in $\mathbb{K}$ è un'equazione della forma

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n = b \qquad [3.1]$$

oppure della forma equivalente

$$a_1 X_1 + \dots + a_n X_n - b = 0$$

in cui $a_1, \dots, a_n, b \in \mathbb{K}$. La [3.1] deve intendersi come una relazione tra quantità variabili o incognite, rappresentate dalle indeterminate $X_1, \dots, X_n$.

Una *soluzione dell'equazione* [3.1] è un elemento $(x_1, \dots, x_n)$ di $\mathbb{K}^n$ che, sostituito nella [3.1] al posto della n-upla $(X_1, \dots, X_n)$, dà luogo a una identità.

La [3.1] si dice *omogenea* (*non omogenea*) se $b = 0$ (se $b \neq 0$).

Se si considerano simultaneamente $m \geq 1$ equazioni lineari nelle incognite $X_1, \dots, X_n$:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n &= b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n &= b_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n &= b_m, \end{aligned} \qquad [3.2]$$

si ottiene un *sistema di m equazioni lineari nelle n incognite* $X_1, \dots, X_n$. Il sistema [3.2] si dice *omogeneo* (*non omogeneo*) se $b_1 = b_2 = \dots = b_m = 0$ (se $b_i \neq 0$ per qualche i).

Una *soluzione del sistema* [3.2] è un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ che è soluzione simultanea delle m equazioni [3.2]. Il sistema si dice *compatibile* (*incompatibile*) se possiede almeno una soluzione (se non possiede soluzioni). Ogni sistema omogeneo ammette almeno la soluzione $(0, \ldots, 0)$, che viene detta *soluzione banale*, e quindi è compatibile; ogni sua altra soluzione si dice *non banale*.

Si noti che, viceversa, se il sistema [3.2] ammette la soluzione $(0, \ldots, 0)$, allora è omogeneo.

Ad esempio il sistema di equazioni a coefficienti reali

$$X_1 + 2X_2 = 1$$
$$X_1 + 2X_2 = 0$$

è incompatibile, perché i primi membri delle due equazioni sono uguali, ma non lo sono i secondi membri e quindi non esiste alcun $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ che soddisfi entrambe le equazioni.

Il sistema

$$X_1 + X_2 = 1$$
$$X_1 - X_2 = 3$$

è compatibile e ammette l'unica soluzione $(2, -1)$, che si ottiene nel modo seguente. Sommando membro a membro le due equazioni, si ottiene la nuova equazione $2X_1 = 4$, che è soddisfatta dall'unico valore $X_1 = 2$; sostituendo questo valore nella prima equazione si ottiene l'unico valore $X_2 = -1$ che la soddisfa. Inoltre la coppia $(2, -1)$ è soluzione anche della seconda equazione, e quindi è l'unica soluzione del sistema.

Il sistema

$$X_1 + 3X_2 = -1$$
$$2X_1 + 6X_2 = -2$$

è compatibile ed ammette le infinite soluzioni $(-1 - 3t, t)$ al variare del parametro $t \in \mathbb{R}$. Infatti le due equazioni sono proporzionali e quindi hanno le stesse soluzioni: risolvendo per esempio la prima si trovano le soluzioni dette.

Il sistema

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n &= 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n &= 0 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n &= 0 \end{aligned} \qquad [3.3]$$

si dice il *sistema omogeneo associato al sistema* [3.2].

3.1 PROPOSIZIONE *Se il sistema* [3.2] *è compatibile, le sue soluzioni sono tutte e sole le n-uple ottenute sommando a una qualsiasi di esse una soluzione del sistema omogeneo associato* [3.3].

Dimostrazione

Denotiamo con Σ e Σ_0 i due sottoinsiemi di K^n i cui elementi sono rispettivamente le soluzioni del sistema [3.2] e del sistema [3.3]. Se $(y_1, \ldots, y_n) \in \Sigma$ e $(x_1, \ldots, x_n) \in \Sigma_0$, allora

$$(y_1, \ldots, y_n) + (x_1, \ldots, x_n) = (y_1 + x_1, \ldots, y_n + x_n) \in \Sigma.$$

Infatti per ogni $j = 1, \ldots, m$ si ha

$$\begin{aligned} a_{j1}(y_1 + x_1) + a_{j2}(y_2 + x_2) + \ldots + a_{jn}(y_n + x_n) &= \\ = (a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n) + (a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n) &= \\ = b_j + 0 = b_j. \end{aligned}$$

Viceversa, fissata $(y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \Sigma$, per ogni altra $(z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \Sigma$ si ha

$$(z_1 - y_1, z_2 - y_2, \ldots, z_n - y_n) \in \Sigma_0$$

perché:

$$\begin{aligned} a_{j1}(z_1 - y_1) + \ldots + a_{jn}(z_n - y_n) = a_{j1}z_1 + \ldots + a_{jn}z_n - \\ - (a_{j1}y_1 + a_{j2}y_2 + \ldots + a_{jn}y_n) = b_j - b_j = 0 \end{aligned}$$

per ogni $j = 1, \ldots, m$.

Poiché

$$(z_1, z_2, \ldots, z_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1 - y_1, z_2 - y_2, \ldots, z_n - y_n)$$

abbiamo l'asserto.

Al sistema [3.2] possiamo associare la matrice $A = (a_{ij}) \in M_{m,n}(K)$ formata dai coefficienti delle incognite delle m equazioni del sistema, che si dice la *matrice dei coefficienti* del sistema [3.2]. Aggiungendo ad A come $(n+1)$-esima colonna la

$$\mathbb{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

formata dai termini costanti delle equazioni [3.2], si ottiene la matrice ad m righe e $n+1$ colonne:

$$(A\,\mathbb{b}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix},$$

che diremo la *matrice orlata* del sistema [3.2].

Possiamo interpretare gli m primi membri di [3.2] come le componenti di un vettore colonna e riscrivere la [3.2] come un'uguaglianza di vettori colonna:

$$\begin{pmatrix} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1n}X_n \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \dots + a_{2n}X_n \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \dots + a_{mn}X_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}. \qquad [3.4]$$

Ponendo

$$\mathbb{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$$

e considerando $\mathbb{X}$ come un vettore colonna, il primo membro della [3.4] è il prodotto righe per colonne $A\mathbb{X}$. Il sistema [3.2] si scrive quindi anche nella seguente forma più concisa:

$$A\mathbb{X} = \mathbb{b}. \qquad [3.5]$$

Viceversa è evidente che per ogni matrice a m righe ed $n+1$ colonne esiste un sistema di m equazioni lineari nelle incognite $X_1, \dots, X_n$ di cui essa è la matrice orlata. Nel seguito utilizzeremo spesso questa corrispondenza biunivoca esistente tra matrici e sistemi di equazioni lineari per semplificare la trattazione, riducendoci a considerare matrici anziché sistemi.

Un sistema di equazioni lineari nelle incognite $X_1, \dots, X_n$ si dice *a gradini* se

ha la forma seguente:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots \qquad\qquad & + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{22}X_2 + \dots \qquad\qquad & + a_{2n}X_n = b_2 \\ & \vdots \\ a_{mm}X_m + \dots & + a_{mn}X_n = b_m \end{aligned} \qquad [3.6]$$

con $a_{11}a_{22}\dots a_{mm} \neq 0$. La matrice dei coefficienti di [3.6] è

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & & & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & & & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{mm} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Pivots

In particolare $m \leq n$.

Supponiamo $m = n$. L'ultima equazione di [3.6] è soddisfatta dal solo valore $x_n = b_n a_{nn}^{-1}$, il quale, sostituito nella penultima equazione, fornisce un unico valore x_{n-1} che la soddisfa. I valori x_{n-1}, x_n così ottenuti, sostituiti nella terz'ultima equazione, danno luogo a un unico valore x_{n-2} che la soddisfa. Procedendo in questo modo si arriva a ottenere un'unica soluzione di [3.6]. Quindi *un sistema a gradini di n equazioni in n incognite possiede un'unica soluzione.*

Se $m < n$ il sistema [3.6] può essere riscritto nella forma equivalente seguente:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1m}X_m &= b_1 - (a_{1m+1}X_{m+1} + \dots + a_{1n}X_n) \\ a_{22}X_2 + \dots + a_{2m}X_m &= b_2 - (a_{2m+1}X_{m+1} + \dots + a_{2n}X_n) \\ &\vdots \\ a_{mm}X_m &= b_m - (a_{mm+1}X_{m+1} + \dots + a_{mn}X_n). \end{aligned}$$

Dando valori arbitrari $t_{m+1}, \dots, t_n \in \mathbb{K}$ alle incognite $X_{m+1}, \dots, X_n$ si ottiene un sistema a gradini di m equazioni nelle m incognite $X_1, \dots, X_m$:

$$\begin{aligned} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \dots + a_{1m}X_m &= b_1 - (a_{1m+1}t_{m+1} + \dots + a_{1n}t_n) \\ a_{22}X_2 + \dots + a_{2m}X_m &= b_2 - (a_{2m+1}t_{m+1} + \dots + a_{2n}t_n) \\ &\vdots \\ a_{mm}X_m &= b_m - (a_{mm+1}t_{m+1} + \dots + a_{mn}t_n), \end{aligned} \qquad [3.7]$$

il quale ha un'unica soluzione. Ne deduciamo che il sistema [3.6] ammette le infinite soluzioni ottenute dalle [3.7] al variare dei parametri $t_{m+1}, \dots, t_n$ in $\mathbb{K}$. Dal modo in cui si calcolano le soluzioni si deduce che ogni soluzione di [3.7] si esprime come una n-upla

$$(S_1(t_{m+1}, \ldots, t_n),\ S_2(t_{m+1}, \ldots, t_n), \ldots, S_n(t_{m+1}, \ldots, t_n)) \qquad [3.8]$$

in cui gli $S_i(t_{m+1}, \ldots, t_n)$ sono polinomi di primo grado nei parametri $t_{m+1}, \ldots, t_n$. La [3.8] è la *soluzione generale del sistema* [3.6].

La n-upla dei termini costanti $(c_1, \ldots, c_n)$ degli S_i è una delle soluzioni, precisamente quella corrispondente ai valori $t_{m+1} = \ldots = t_n = 0$. Da ciò e dalla proposizione 3.1 segue che la n-upla di polinomi omogenei in $t_{m+1}, \ldots, t_n$

$$(S_1(t_{m+1}, \ldots, t_n) - c_1,\ S_2(t_{m+1}, \ldots, t_n) - c_2, \ldots, S_n(t_{m+1}, \ldots, t_n) - c_n)$$

è la soluzione generale del sistema omogeneo associato a [3.6].

In particolare vediamo che *un sistema a gradini è sempre compatibile*. Esprimeremo il fatto che le soluzioni di [3.6] si ottengono come funzioni di $n - m$ parametri liberi di variare arbitrariamente, dicendo che *il sistema* [3.6] *possiede* ∞^{n-m} *soluzioni*. Nel caso $n = m$ intenderemo con ciò dire che il sistema possiede una sola soluzione.

Un'equazione lineare [3.1] in cui $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$ si può considerare come un particolare sistema a gradini, salvo scambiare tra loro due delle variabili se $a_1 = 0$; pertanto essa possiede ∞^{n-1} soluzioni.

Due *sistemi di equazioni lineari* nelle stesse incognite $X_1, \ldots, X_n$ si dicono *equivalenti* se possiedono le stesse soluzioni. Per essere equivalenti due sistemi non devono necessariamente avere lo stesso numero di equazioni.

Vogliamo ora studiare un procedimento, detto *metodo di eliminazione di Gauss-Jordan*, che permette di stabilire se un sistema è compatibile oppure no, e nel caso affermativo di trovarne sistematicamente tutte le soluzioni. Tale procedimento consiste nel sostituire il sistema assegnato con un sistema a gradini, ad esso equivalente, mediante passaggi successivi detti "operazioni elementari sulle equazioni del sistema". Esse corrispondono ad altrettante operazioni sulle righe della matrice orlata.

Esistono tre tipi di *operazioni elementari sulle righe di una matrice*:

I) scambiare tra loro due righe della matrice;
II) moltiplicare una riga della matrice per uno scalare non nullo;
III) sostituire una riga della matrice con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra riga.

Le corrispondenti *operazioni elementari sulle equazioni di un sistema* sono le seguenti:

I) scambiare tra loro due equazioni del sistema;
II) moltiplicare (primo e secondo membro di) un'equazione per uno stesso scalare non nullo;
III) sostituire un'equazione con quella ottenuta sommando ad essa un multiplo di un'altra equazione.

Se si effettua su di un sistema un'operazione elementare del tipo (I), il nuovo sistema che si ottiene è equivalente al precedente, perché le soluzioni di un sistema non dipendono dall'ordine in cui si considerano le sue equazioni. Similmente un'operazione del tipo (II) non cambia l'insieme delle soluzioni del sistema perché due equazioni proporzionali hanno le stesse soluzioni. Anche un'operazione del tipo (III) non modifica l'insieme delle soluzioni del sistema: infatti se una n-upla $(x_1, \ldots, x_n) \in K^n$ soddisfa due equazioni del sistema,

$$\begin{aligned} a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n &= b_i \\ a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \ldots + a_{jn}X_n &= b_j, \end{aligned} \qquad [3.9]$$

allora per un qualsiasi $c \in K$ essa è soluzione delle due equazioni

$$\begin{aligned} a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n &= b_i \\ (a_{j1}X_1 + a_{j2}X_2 + \ldots + a_{jn}X_n) + c(a_{i1}X_1 + a_{i2}X_2 + \ldots + a_{in}X_n) &= b_j + cb_i. \end{aligned} \qquad [3.10]$$

Si verifica in modo simile che viceversa ogni soluzione delle [3.10] soddisfa le [3.9].

Quindi, *se si effettua una qualsiasi operazione elementare sulle equazioni di un sistema si ottiene un sistema ad esso equivalente.* → rel. equiv

Supponiamo dunque di avere assegnato un sistema [3.2]. Osserviamo preliminarmente che se una delle sue equazioni, diciamo la i-esima, ha identicamente nullo il primo membro, cioè è della forma

$$0 = b_i,$$

allora essa è identicamente soddisfatta se $b_i = 0$, mentre è incompatibile se $b_i \neq 0$. Nel primo caso potremo cancellare l'equazione e ottenere un sistema equivalente al precedente, nel secondo caso il sistema [3.2] è incompatibile. Possiamo pertanto supporre che nessuno dei primi membri di [3.2] sia identicamente nullo.

Possiamo inoltre supporre che sia $a_{i1} \neq 0$ per qualche $i = 1, \ldots, m$: ciò può essere ottenuto scambiando eventualmente tra loro due delle incognite. Con un'operazione elementare (I) possiamo ottenere $a_{11} \neq 0$, e moltiplicando per a_{11}^{-1} la prima equazione (operazione elementare (II)) possiamo ridurci al caso $a_{11} = 1$. Sommando alle successive equazioni la prima moltiplicata rispettivamente per $-a_{21}$ $-a_{31}, \ldots, -a_{m1}$ (operazione elementare (III)) si ottiene un nuovo sistema della forma seguente:

$$\begin{aligned} X_1 + a'_{12}X_2 + \ldots + a'_{1n}X_n &= b'_1 \\ a'_{22}X_2 + \ldots + a'_{2n}X_n &= b'_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a'_{m2}X_2 + \ldots + a'_{mn}X_n &= b'_m. \end{aligned} \qquad [3.11]$$

Se qualcuna delle equazioni del sistema [3.11] è della forma $0 = 0$, possiamo ometterla senza modificare l'insieme delle soluzioni. Se invece compare un'equazione della forma $0 = b_i'$, con $b_i' \neq 0$, allora il sistema è incompatibile, e pertanto anche [3.2] è incompatibile ed il procedimento si arresta. Possiamo pertanto supporre che nessuno dei primi membri del sistema [3.11] sia identicamente nullo.

Ora procediamo sul sistema [3.11] senza più occuparci della prima equazione e ragionando, sulle rimanenti equazioni, come nel caso precedente. Effettuando eventualmente un cambiamento dell'ordine delle variabili ed operazioni elementari (I) (II) possiamo supporre $a_{22}' = 1$. Sommando alle successive equazioni la prima moltiplicata rispettivamente per $-a_{32}', -a_{42}', \dots, -a_{m2}'$ (operazione elementare (III)), si ottiene un nuovo sistema della forma seguente:

$$\begin{aligned} X_1 + a_{12}'X_2 + a_{13}'X_3 + \dots + a_{1n}'X_n &= b_1' \\ X_2 + a_{23}''X_3 + \dots + a_{2n}''X_n &= b_2'' \\ a_{33}''X_3 + \dots + a_{3n}''X_n &= b_3'' \\ \vdots \qquad & \quad \vdots \\ a_{s3}''X_3 + \dots + a_{sn}''X_n &= b_s''. \end{aligned} \qquad [3.12]$$

Dopo aver eliminato dal sistema [3.12] tutte le equazioni della forma $0 = 0$, verifichiamo se vi compare un'equazione della forma $0 = b_i''$, $b_i'' \neq 0$: in caso affermativo il sistema è incompatibile e pertanto anche [3.2] lo è, ed il procedimento ha termine. In caso contrario applichiamo di nuovo lo stesso procedimento al sistema [3.12] escludendo le prime due equazioni.

Questo procedimento potrà essere iterato fintanto che non si arrivi a un sistema incompatibile oppure a un sistema a gradini equivalente al sistema [3.2] da cui eravamo partiti. Nel primo caso possiamo concludere che il sistema [3.2] è incompatibile. Nel secondo caso possiamo calcolare le soluzioni del sistema a gradini, che sono anche le soluzioni di [3.2], ed il procedimento di Gauss-Jordan ha termine. La soluzione generale del sistema a gradini che si è ottenuto è detta *soluzione generale del sistema* [3.2].

Daremo ora alcuni esempi per illustrare il procedimento di eliminazione di Gauss-Jordan. Nella pratica è preferibile operare sulla matrice orlata del sistema piuttosto che sulle equazioni. Inoltre è più opportuno effettuare i cambiamenti nell'ordine delle variabili che dovessero rendersi necessari, corrispondenti allo scambio di colonne della matrice, solo dopo aver effettuato tutte le necessarie operazioni elementari sulle righe.

3.2 *Osservazioni ed esempi*

1. $\mathsf{K} = \mathsf{R}$

$$X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \qquad 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 2 \qquad 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 1.$$

Eseguiamo operazioni elementari sulle righe della matrice orlata:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Il sistema ridotto a gradini è

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 + 3X_3 &= 1 \\ X_2 + \frac{2}{3}X_3 &= 0 \\ X_3 &= 1, \end{aligned}$$

che possiede l'unica soluzione

$$\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right).$$

2. $\mathsf{K} = \mathsf{R}$

$$\begin{aligned} X_3 + 2X_4 &= 3 \\ 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 \qquad &= 4 \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 + 2X_4 &= 7. \end{aligned} \qquad [3.13]$$

Eseguiamo operazioni elementari sulle righe della matrice orlata:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Il sistema corrispondente è

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_2 - X_3 \quad &= 2 \\ X_3 + 2X_4 &= 3. \end{aligned}$$

Prendendo le variabili nell'ordine X_1, X_3, X_2, X_4 le stesse equazioni si riscrivono nella forma seguente:

$$\begin{aligned} X_1 - X_3 + 2X_2 \quad &= 2 \\ X_3 \quad + 2X_4 &= 3. \end{aligned}$$

Abbiamo pertanto un sistema a gradini, la cui soluzione generale, che è anche la soluzione generale del sistema [3.13], è

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (5 - 2t - 2u,\ t,\ 3 - 2u,\ u), \qquad t,\ u \in \mathsf{R}.$$

Il sistema possiede ∞^2 soluzioni.

3. $\mathsf{K} = \mathsf{R}$

$$\begin{aligned} X_2 - X_3 &= -1 \\ X_1 \quad + X_3 &= \ \ 1 \\ 2X_1 + X_2 + X_3 &= \ \ 2. \end{aligned}$$

Eseguiamo operazioni elementari sulle righe della matrice orlata:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

La terza riga corrisponde all'equazione incompatibile $0 = 1$; pertanto il sistema è incompatibile.

4. Ogni sistema omogeneo di m equazioni in n incognite, con $n \geq m$, possiede ∞^N soluzioni per qualche $N \geq n - m$. Infatti il sistema è compatibile perché omogeneo, e il procedimento di Gauss-Jordan lo trasforma in un sistema a gradini di p equazioni con $p \leq m$. Quindi il sistema originario possiede ∞^{n-p} soluzioni ed $n - p \geq n - m$. Vediamo un esempio.

$\mathsf{K} = \mathsf{R}$

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + 2X_3 + \ \ X_4 \qquad &= 0 \\ X_1 + X_2 + \ \ X_3 + 2X_4 - \ \ X_5 &= 0 \\ X_1 + X_2 \qquad + 3X_4 - 2X_5 &= 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 \qquad + \ \ X_5 &= 0. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Questo sistema è omogeneo; in questo caso è sufficiente considerare la matrice dei coefficienti, anziché la matrice orlata. Eseguiamo operazioni elementari sulle righe della matrice:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

e scambiamo tra loro la seconda e la terza colonna:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Otteniamo il sistema a gradini

$$\begin{aligned} X_1 + 2X_3 + X_2 + X_4 \qquad &= 0 \\ X_3 \qquad - X_4 + X_5 &= 0 \end{aligned}$$

che possiede ∞^3 soluzioni. Pertanto la soluzione generale del sistema [3.14] è

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-t - 3u + 2v,\ t,\ u - v,\ u,\ v) \qquad t,\ u,\ v \in \mathsf{R}.$$

5. Supponiamo che

$$A\mathbb{X} = \mathbb{b}, \tag{3.15}$$

$A \in M_n(\mathsf{K})$, $\mathbb{b} \in \mathsf{K}^n$, sia un sistema di n equazioni in n incognite tale che A sia invertibile. Allora esso è compatibile e possiede un'unica soluzione $\mathbb{x} = {}^t(x_1 \ldots x_n) \in \mathsf{K}^n$