§7 Quadriche

$\mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$ principalmente) $[x_0, \dots, x_n]$ coord. omog.
$\mathrm{char}(\mathbb{K}) \neq 2$

Def. 7.1.1. Γ **quadrica proiettiva** ipersuperficie definita da $f(x_0, \dots, x_n)$ polinomio omogeneo di grado 2 con eq. cartesiana

$$f(x_0, \dots, x_n) = 0$$

$\mathrm{Supp}(\Gamma) = \{ P = [p_0, \dots, p_n] \in \mathbb{P}^n \mid f(p_0, \dots, p_n) = 0 \}$

Oss (1) è una buona def. in $\mathbb{P}^n$ perché f omog. di deg $= 2$ $\Rightarrow$

$$[P] = [p_0, \dots, p_n] = [\lambda p_0, \dots, \lambda p_n] \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}^*$$

$$f(\lambda p_0, \dots, \lambda p_n) = \lambda^2 f(p_0, \dots, p_n)$$

(2) $\forall \rho \in \mathbb{K}^*$

$$\rho f(x_0, \dots, x_n) \quad \text{e} \quad f(x_0, \dots, x_n)$$

definiscono la stessa quadrica

(3) Come gli iperpiani di $\mathbb{P}^n$ formano $\mathbb{P}^{n\vee}$ anche le quadriche formano un opportuno sp. proiettivo (vedremo casi particolari più avanti)

(4) Se $n = 2$, **coniche proiettive**

Per brevità $\underline{x} = [x_0, \dots, x_n]$ cosicché scriviamo

$$f(\underline{x}) = \sum_{0 \le i \le j \le n} b_{ij} x_i x_j$$

non voglio vedere distinti $x_i x_j$ e $x_j x_i$ per $i \neq j$

$$(b_{ij}) \neq 0$$

Come per le f. q. se poniamo

$$b_{ii} = a_{ii} \qquad i = 0, \dots, n$$

$$b_{ij} = 2a_{ij} \qquad \text{se } 1 \le i < j \le n$$

$$a_{ij} = a_{ji} \qquad \text{se } \quad i > j$$

$$\Gamma \rightsquigarrow \qquad A = (a_{ij}) \in M(n+1 \times n+1, \mathbb{K})^{sym}$$

è

$$f(\underline{x}) = a_{00}x_0^2 + a_{11}x_1^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{01}x_0x_1 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n$$

$$= \underline{x}^t A \underline{x}$$

dove $\underline{x} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ <u>$f(x)$ è f.q. con matrice rappresentativa A</u>

A <u>rappresenta Γ</u> di eq. $f(\underline{x}) = 0$ o A <u>matrice associata a Γ</u> nel riferimento scelto

$$\Gamma \rightsquigarrow f(\underline{x}) = 0 \rightsquigarrow A$$
$$\rightsquigarrow \rho f(\underline{x}) = 0 \rightsquigarrow \rho A$$

<u>Def 7.1.3</u> Fissata un'eq. cartesiana $f(\underline{x}) = 0$ per Γ

$$\Omega_f : \mathbb{K}^{n+1} \times \mathbb{K}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{K}$$
$$(\underline{x}, \underline{y}) \longrightarrow \Omega_f(\underline{x}, \underline{y}) = \underline{x}^t A \underline{y} \underset{\substack{\downarrow \\ A \text{ simm.}}}{=} \underline{y}^t A \underline{x}$$

<u>forma polare (bil. simm) associata a f</u>

e vale come sempre

$$\Omega_f(\underline{x}, \underline{x}) = f(\underline{x}) \qquad \text{identità di Eulero}$$

Come cambia sotto una proiettività di $\mathbb{P}^n$ la matrice associata ad una data quadrica?

$$\rho \underline{X} = M \underline{Y} \quad \text{eq. proiettività con } M \in GL(n+1; \mathbb{K})$$
$$\rho \in \mathbb{K}^*$$

$\mathcal{T}: \quad \underline{X}^t A \underline{X} = 0$

Poichè $\underline{X} = \frac{1}{\rho} M \underline{Y} \Rightarrow$

$$\left(\frac{1}{\rho} M \underline{Y}\right)^t A \left(\frac{1}{\rho} M \underline{Y}\right) = \frac{1}{\rho^2}\left(\underline{Y}^t M^t A M \underline{Y}\right)$$

$\Rightarrow \quad f(\underline{Y}) = \underline{Y}^t B \underline{Y} = 0$ dove $B = M^t A M$

<u>Oss 7.1.6</u> (i) $\det(B) = \det(A) \cdot \det(M)^2$

(ii) Poichè $rg(A) = rg(B)$

$$\boxed{rg\,\mathcal{T} := rg(A) = rg(\Omega_f) = rg(f)}$$

(iii) $\mathcal{T}$ individua Ω_f solo a meno di $\rho \in \mathbb{K}^*$.

<u>Def. 7.1.7</u>

$\mathcal{T}$ <u>non-degenere</u> se $rg(\mathcal{T}) = n+1$

<u>degenere</u> se $rg(\mathcal{T}) \leq n$

Esempio 7.1.8

$n = 1$ quadriche di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

$$f(x_0, x_1) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2$$

* Se $[1,0] \in \text{Supp}(\mathcal{T}^1) \Rightarrow a_{00} = 0 \Rightarrow f(\underline{x}) = 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2$

$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{01} \\ a_{01} & a_{11} \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = a_{01}^2$$

$\Rightarrow \quad f(\underline{x}) = x_1(2a_{01}x_0 + a_{11}x_1) = 0$

$$[1,0] \quad e \quad [a_{11}, -2a_{01}]$$

(1) Se $a_{01} = 0 \to \mathcal{T}^1$ degenere e, poiché $a_{11} \neq 0$, anche $[a_{11}, 0] = [1, 0]$ cioè $\text{Supp}\,\mathcal{T}^1 = \{[1,0]\}$ ma contato 2 volte

(2) Se $a_{01} \neq 0 \quad [1,0] \neq [a_{11}, -2a_{01}]$ 2 pti dist. su $\mathbb{P}^1$

* Se $[1,0] \notin \text{Supp}(\mathcal{T}^1) \Rightarrow$ posso dividere $f(x_0,x_1)$ per x_1^2 (deomogeneizz. 1-esima) $t = \dfrac{x_0}{x_1}$

$$(*) \quad a_{00}t^2 + 2a_{01}t + a_{11} = 0$$

polinomio II grado

$$\Delta = 4a_{01}^2 - 4a_{00}a_{11} = 4(a_{01}^2 - a_{00}a_{11}) = -4\det(A)$$

- Se $\det(A) = 0 \Rightarrow \mathcal{T}^1$ degenere $\Rightarrow (*)$ 2 sol. coincidenti i.e. un punto doppio
- Se $\det(A) \neq 0 \Rightarrow \mathcal{T}^1$ non degenere

$\nearrow$ $\mathbb{K}$ alg. chiuso $\Rightarrow$ 2 punti $\neq$

$\searrow$ $\mathbb{K} = \mathbb{R}$
- $\nearrow \Delta > 0 \Rightarrow \text{Supp}\,\mathcal{T}^1 = 2$ pti $\neq$.
- $\searrow \Delta < 0 \Rightarrow \text{Supp}\,\mathcal{T}^1 = \emptyset$

Def. 7.1.10

Una quadrica Γ di eq. cart. $f(\underline{X})=0$ si dice **riducibile** se $f=g\cdot h$ con g e h omog. di grado 1

$$\left.\begin{array}{l} H_g=\{g=0\} \\ H_h=\{h=0\} \end{array}\right\rangle \text{iperpiani in } \mathbb{P}^n_{\mathbb{K}}$$

$\Gamma = H_g + H_h$ componenti irriducibili di Γ

Se inoltre $H_g = H_h$, cioè $g=\lambda h$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$ e quindi $f=\lambda h^2$ quadrato di un pol. omog. lin.

$\Gamma = 2H_h$ e H_h è comp. irrid. di molteplicità 2

Oss

Se $n=1$, ogni quadrica di $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ è riducibile

Se $n=2$ le coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ riducibili sono o unioni di 2 rette incidenti oppure una retta doppia

Non è vero per $\mathbb{K}=\mathbb{R}$: $x_0^2+x_1^2+x_2^2=0$ è conica $\emptyset$, $x_0^2+x_1^2=0$ è conica puntiforme, $[0,0,1]$ doppio è l'unico elemento nel supporto

<u>$n=1$</u> $f(\underline{x}) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + a_{11}x_1^2$

$[\Gamma] = [a_{00}, 2a_{01}, a_{11}]$ $\rightsquigarrow$ formano un $\mathbb{P}^3$

<u>$n=2$</u> $f(\underline{x}) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$

$[\Gamma] \equiv [a_{00}, 2a_{01}, -, a_{22}]$ formano un $\mathbb{P}^5$

e così via!

Lemma 7.1.12

Ogni quadrica $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ riducibile è degenere se $n \geq 2$. Più precisamente

Γ riducibile $\Leftrightarrow$ $rg(\Gamma) \leq 2$

$rg(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow \Gamma = 2H_h$, per un qualche iperp. H_h

$rg(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma = H_g + H_h$, con $H_g \neq H_h$

In part. ogni Γ riducibile contiene un iperpiano

Corollario

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ conica

Γ è riducibile $\Leftrightarrow$ è degenere

$rg(\Gamma) = 1 \Leftrightarrow \Gamma$ retta doppia $\Gamma = 2H_h$

$rg(\Gamma) = 2 \Leftrightarrow \Gamma = H_g + H_h$ 2 rette incidenti

<u>dim</u> Poiché $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ è t.c. $rg(\Gamma) \leq 3$

$rg(\Gamma) = 3$ non degenere. $rg(\Gamma) \leq 2$ deg. e poi Lemma 7.1.1

dim. Lemma 7.1.12

(6 bis)

Dimostrazione. $\Rightarrow$): Se $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile, è della forma $\mathbf{\Gamma} = H_1 + H_2$ per opportuni iperpiani H_1 e H_2. E' sempre possibile fissare un sistema di riferimento in cui H_1 abbia equazione $X_0 = 0$. Sia $a_0X_0 + a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n = 0$ una equazione di H_2 in tale riferimento.

La quadrica $\mathbf{\Gamma}$ ha dunque equazione $a_0X_0^2 + a_1X_0X_1 + a_2X_0X_2 + \ldots + a_nX_0X_n = 0$ e la matrice associata è

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_0 & \frac{a_1}{2} & \ldots & \frac{a_n}{2} \\ \frac{a_1}{2} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{a_n}{2} & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.14}$$

Osservando la matrice, si vede che $\operatorname{rg} \mathbf{A} = \begin{cases} 1 \Leftrightarrow H_1 = H_2 \\ 2 \Leftrightarrow H_1 \neq H_2 \end{cases}$ e, in particolare, il rango è sempre minore o uguale a 2.

$\Leftarrow$): Supponiamo che $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 1$. In tal caso (cf. anche [1], Cor. 10.28, pag. 158), esistono un vettore riga numerico $\mathbf{a}$ e scalari non tutti nulli $\rho_0, \ldots, \rho_n$ tali che:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \rho_0\mathbf{a} \\ \rho_1\mathbf{a} \\ \vdots \\ \rho_n\mathbf{a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a}. \tag{7.15}$$

E' possibile scegliere una matrice non singolare $\mathbf{B}$ tale che $(\rho_0, \ldots, \rho_n)\mathbf{B} = (1, 0, \ldots, 0)$. Si scelga il sistema di riferimento corrispondente al cambio di coordinate $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{X}'$. L'equazione di $\mathbf{\Gamma}$, nel nuovo sistema di coordinate, è diventata

$$\mathbf{X}'^t\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}\mathbf{X}' = \mathbf{X}'^t\mathbf{B}^t \begin{pmatrix} \rho_0 \\ \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_n \end{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{X}' = \mathbf{X}'^t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{X}' = \tag{7.16}$$
$$= X_0'(\mathbf{a}\mathbf{B}\mathbf{X}') = 0$$

mettendo in evidenza che $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile, contenendo l'iperpiano di equazione $X_0' = 0$. Per quanto osservato, poiché $\mathbf{A}$ ha rango uno, $\mathbf{\Gamma}$ deve essere composta da un iperpiano con molteplicità 2.

Supponiamo ora che $\operatorname{rg} \mathbf{A} = 2$. Sia $S = \{\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di vettori linearmente indipendenti tali che $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = 0 \ \forall i = 2, \ldots n$. Si completi S ad una base $\mathbf{v}_0, \ldots, \mathbf{v}_n$ di $\mathbb{C}^{n+1}$ e si consideri il riferimento che ha $[\mathbf{v}_0], \ldots, [\mathbf{v}_n]$ come punti fondamentali. Se $\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{X}'$ descrive il cambiamento di coordinate, la matrice $\mathbf{B}^t\mathbf{A}\mathbf{B}$ di $\mathbf{\Gamma}$ nel nuovo sistema è della forma:

$$\begin{pmatrix} a & b & \ldots & \ldots & 0 \\ b & d & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & 0 \end{pmatrix} \tag{7.17}$$

con $ad - b^2 \neq 0$. Dunque, nel nuovo sistema, $\mathbf{\Gamma}$ è il luogo degli zeri di un polinomio omogeneo in due variabili, che necessariamente si fattorizza propriamente. Dunque $\mathbf{\Gamma}$ è riducibile. Per quanto prima osservato, $\mathbf{\Gamma}$ si deve allora decomporre come somma di due iperpiani distinti, altrimenti il rango sarebbe 1.

7.2. Intersez. di Γ con una retta di $\mathbb{P}^n$

Per semplicità $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

$\Gamma: \quad f(\underline{X}) = \underline{X}^t A \underline{X} = 0 \qquad \Omega_f(\underline{X}, \underline{Y})$ forma polare

Sia

$$r = \langle P, Q \rangle = P \vee Q \subset \mathbb{P}^n \qquad P \neq Q$$

$$\Rightarrow \quad r: \quad \underline{X} = \lambda \underline{P} + \mu \underline{Q} \qquad [\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$$

$\Rightarrow$

$r \cap \Gamma \doteq f(\lambda \underline{P} + \mu \underline{Q}) = 0$ cerco i valori di $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1$ che azzerano il polinomio nelle indeterminate λ, μ

$$0 = f(\lambda \underline{P} + \mu \underline{Q}) = (\lambda \underline{P} + \mu \underline{Q})^t A (\lambda \underline{P} + \mu \underline{Q}) \underset{\substack{A \text{ simmetrica} \\ \text{e vale bilinearità}}}{=}$$

$$\lambda^2 (\underline{P}^t A \underline{P}) + 2\lambda\mu (\underline{P}^t A \underline{Q}) + \mu^2 \underline{Q}^t A \underline{Q} =$$

$$= \lambda^2 f(\underline{P}) + 2\lambda\mu\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{Q}) + \mu^2 f(\underline{Q})$$

Perciò cerco soluzioni $[\lambda, \mu] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ di eq. II grado omogenea in $\mathbb{C}$:

$$(*) \qquad \boxed{\lambda^2 f(\underline{P}) + 2\lambda\mu\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{Q}) + \mu^2 f(\underline{Q}) = 0}$$

- Se $[\lambda, \mu] = [1, 0]$ è soluzione $\Rightarrow f(\underline{P}) = 0$ cioè $\underline{P} \in \Gamma$

ma allora

$$(*) \quad \mu \underbrace{\left(2\lambda\, \Omega_f(\underline{P}, \underline{Q}) + \mu f(\underline{Q})\right)}_{\text{fornisce}} = 0$$

$\mu = 0$ è associato al punto $\underline{P}$

fornisce l'altro punto di azzeramento, eventualm. coinc. con $\underline{P}$

• Se $[1,0]$ non è soluzione di $(*)$ $\Rightarrow$ $\mu \neq 0$ $\Rightarrow$ posso dividere per μ^2 ⇝ $t = \frac{\lambda}{\mu}$ indeterminata non omogenea $\Rightarrow$ ottengo

$$t^2 f(\underline{P}) + 2t\,\Omega_f(\underline{P},\underline{Q}) + f(\underline{Q}) = 0$$

$$\Delta = 4\,\Omega_f(\underline{P},\underline{Q})^2 - 4 f(\underline{P}) f(\underline{Q})$$

• $\boxed{\Delta \neq 0}$ $\Rightarrow$ $\mathrm{Supp}(r \cap \Gamma)$ è data da $\{A_1, A_2\}$ con $A_1 \neq A_2$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$

e $\boxed{\mathrm{mult}_{A_i}(r \cap \Gamma) = 1 \quad i = 1,2}$ molt. intersez.

cioè $r \cap \Gamma = \{A_1, A_2\}$ $\quad A_1 \neq A_2$

• $\boxed{\Delta = 0}$

Caso 1 $\quad f(\underline{P}) = \Omega_f(\underline{P},\underline{Q}) = f(\underline{Q}) = 0$

$\Rightarrow \forall [\lambda,\mu] \in \mathbb{P}^1$ è sol. $\Rightarrow$ $r \subset \Gamma$

Caso 2 $\quad (f(\underline{P}), \Omega_f(\underline{P},\underline{Q}), f(\underline{Q})) \neq (0,0,0)$

$\Rightarrow \mathrm{Supp}(\Gamma \cap r) = \{A\}$ ma $\boxed{\mathrm{mult}_A(r \cap \Gamma) = 2}$

cioè $r \cap \Gamma = \{2A\}$ quadrica deg. su $r \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

Teorema Bezout in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

$r, \Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ retta e quadrica

Se $r \not\subset \Gamma$ $\Rightarrow$ $r \cap \Gamma$ è composta da due punti, da contare con moltepl. di interse

Corollario 7.2.3 $n \geq 2$

(a) $\forall\, r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ interseca Γ in almeno un punto

(b) Ogni quadrica in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ ha infiniti punti

dim (a) segue da Thm. Bezout.

(b) Poiché in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ esistono infinite rette non incidenti solo in un # finito punti, segue da (a). ∎

Oss Falso se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (conica ϕ o conica puntiforme)

Oss 7.2.4 Se $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ sp. proiettivo consideriamo $\Gamma \cap Z = \Gamma_Z$ è t.c.

$\nearrow$ o $Z \subset \Gamma$, oppure

$\searrow$ $\Gamma_Z \subset Z$ è quadrica in Z

Def 7.2.6

Sia $P \in T' \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

P punto doppio (o singolare) per T' se

$\forall\, r$ passante per P è t.c.

o $r \subset T'$, oppure

$\text{molt}_P(T' \cap r) = 2$

P punto non sing. per T' si dice semplice o non sing, o liscio per T'

Esempio

(1) $n = 2$ $\quad T' : x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0$ conica non deg.

$[0,1,1] = P \in T'$

La retta $r_1 : x_1 - x_2 = 0$ interseca T' $\begin{cases} x_0^2 = 0 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$ in

$P = [0,1,1]$ doppio

ma la $r_2 : x_0 + x_1 - x_2 = 0$ è t.c. $P \in r_2$

però $r_2 \cap P \implies x_2 = x_0 + x_1$

$r_2 \cap P = \begin{cases} x_0^2 + x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_2 = x_0 + x_1 \end{cases}$

$\cancel{x_0^2} + \cancel{x_1^2} - \cancel{x_0^2} - \cancel{x_1^2} - 2x_0x_1 = 0 \iff$

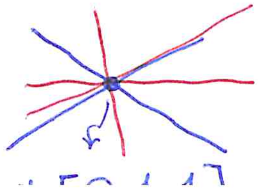
o $x_0 = 0 \rightsquigarrow [0,1,1]$ perchè $x_0 + x_1 - x_2 = 0$

o $x_1 = 0 \rightsquigarrow [1,0,1] = Q \in T'$ $\quad Q \neq T'$

$\implies P$ punto semplice per $T' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Invece $T'' : x_1^2 - x_2^2 = 0$ è

$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) = 0$



ogni retta per P rossa int. con molt=2 [0,1,1]

$\mathrm{Sing}(\Gamma) := \{$ insieme degli eventuali punti doppi di $\Gamma\}$
luogo singolare di Γ

Γ non sing. o liscia se $\mathrm{Sing}(\Gamma) = \phi$
singolare altrimenti

Come mi accorgo se $P \in \Gamma$ è pto doppio?

Prendo $P \in \Gamma \Rightarrow f(\underline{P}) = 0$

Prendo $q \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ un $\forall$ punto

Faccio $r = \langle \underline{P}, \underline{q} \rangle$: $\underline{X} = \lambda \underline{P} + \mu \underline{q}$

Poi

$r \cap \Gamma$: $\lambda^2 \cancel{f(\underline{P})} + 2\lambda\mu\,\Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q}) = 0$

$P \in \Gamma$

diventa

(*) $\boxed{\mu \cdot (2\lambda\,\Omega_f(\underline{P}, \underline{q}) + \mu^2 f(\underline{q})) = 0}$

Poichè $\underline{P}$ corrisponde a $\mu = 0$, allora riusciamo a caratterizzare chi sono eventuali punti doppi di Γ e capire come sono disposti.

Prop. 7.2.7. (a) $P \in \Gamma$ è doppio per $\Gamma \Leftrightarrow$
$\Omega_f(\underline{P}, \underline{X})$ identicamente nullo come polinomio in $\underline{X}$, (infatti $\Omega_f(\underline{P}, \underline{X}) = \underline{P}^t A \underline{X}$ polinomio lin. omog.)
$\Leftrightarrow \underline{P}^t \cdot A = \underline{0} \Leftrightarrow A \cdot \underline{P} = \underline{0}$

Pertanto $\underline{P} \in \Gamma$ è semplice per $\Gamma \Leftrightarrow A \cdot \underline{P} \neq \underline{0}$

(b) $\mathrm{Sing}(\Gamma)$ è un ssp. proiettivo di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di dim $= n - \mathrm{rg}(\Gamma$

Oss Sia r retta per $P \in \Gamma$

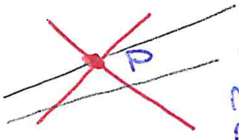
Se P è doppio per Γ e $P \in r$ e r interseca Γ anche in un altro punto $Q \in \Gamma$, $Q \neq P$, per Bezout $\Rightarrow$ $r \subset \Gamma$

Corollario 7.2.9

- $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è non sing. $\Leftrightarrow$ $rg(\Gamma) = 3$ $\Leftrightarrow$ Γ non degenere
- Se $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è sing. allora Γ riducibile

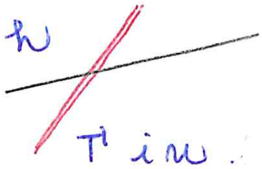
(a) se $rg(\Gamma) = 2$, cioè $\Gamma = H_g + H_h$ 2 rette $\neq$ semplicem. deg.

$Sing(\Gamma) = H_g \cap H_h$



ogni retta per P ha molt. di int. 2 con Γ mentre fuori di P 2 pti $\neq$

(b) se $rg(\Gamma) = 1$, cioè $\Gamma = 2H_h$ doppiamente deg



ogni retta $r \neq H_h$ interseca Γ in $P \in \Gamma$ con molt. 2 e $Sing(\Gamma) = H_h$

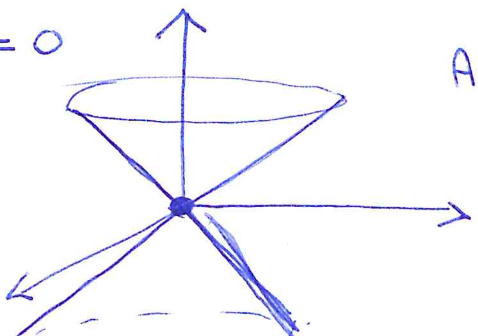
Cor. 7.2.10 $\Gamma \subset \mathbb{P}^2$ degenere $\Leftrightarrow$ Γ singolare $\Leftrightarrow$ Γ contiene una retta.

Falso $n \geq 3$ $\rightsquigarrow$ "Γ sing. $\Leftrightarrow$ Γ riducibile"

$\Gamma \subset \mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ se prendo $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$

Noto che $[1,0,0,0] \in \Gamma \rightsquigarrow$ in $\mathbb{A}^3_{\mathbb{C}}$ $x = \frac{x_1}{x_0}$, $y = \frac{x_2}{x_0}$, $z = \frac{x_3}{x_0}$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ z = k \end{cases}$$



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ e } \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker A$$

$\Downarrow$

Γ sing.

Cono di vertice O e direttrice

$\{ x^2 + y^2 = 1$

Prop. 7.2.12

$n \geq 2$ e $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ quadrica

Γ è riducibile $\Longleftrightarrow$ $rg(\Gamma) \leq 2$

Più precisamente

(a) $rg(\Gamma) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = 2H, \; H \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ iperp.

(b) $rg(\Gamma) = 2 \Longleftrightarrow \Gamma = H_g + H_w, \; H_g \neq H_w$

Quando Γ irrid, i.e. $rg(\Gamma) \geq 3$ allora

Γ → non sing. irrid $\Longleftrightarrow$ $rg(\Gamma) = n+1$

Γ → un cono di vertice $Sing(\Gamma)$ su una Γ_Z non degenere in un ssp. proiettivo complementare a $Sing(Z)$

dim. La I parte è Lemma 7.1.12

Per quanto riguarda il resto dell'enunciato procediamo nelle pagine successive

~~Prop. 7.2.12~~

~~Se $n \geq 2$ una quadrica $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$~~

~~è riducibile $\Longleftrightarrow rg(\Gamma) \leq 2$~~

~~Più precisamente~~

~~(a) $rg(\Gamma) = 1 \Longleftrightarrow \Gamma = 2H$~~

~~(b) $rg(\Gamma) = 2 \Longleftrightarrow \Gamma = H_\beta + H_\alpha \quad H_\beta \neq H_\alpha$~~

$\Gamma: \quad \underline{x}^t A \, \underline{x} = 0$ e $rg(\Gamma) = r \leq n+1$

A meno di camb. coord. (proiettività) diventa in forma normale

$$x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_{r-1}^2 = 0 \qquad \text{in } \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$$

Se $r-1 = n \Rightarrow r = n+1$ $\quad \Gamma$ non deg. e f $\neq$ g. h

Se $r-1 < n \Rightarrow \Gamma$ degenere supponiamo

$r \geq 3$ cioè almeno $x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \rightsquigarrow A = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \end{pmatrix}$

vediamo caso limite $\qquad rg(\Gamma) = 3$

$[0,0,0,1,\dots,0], \dots, [0,0,0,\dots,1] \in Sing(\Gamma)$

$\Rightarrow Sing(\Gamma) = U_3 \vee U_4 \cup \dots \cup U_n \cong \mathbb{P}^{n-3}$

$$Sing(\Gamma) = \begin{cases} x_0 = 0 \\ x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Prendo un $\mathbb{P}^2$ sghembo a $Sing(\Gamma)$ $Z: \begin{cases} x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \Gamma_Z = \Gamma \cap Z = \begin{cases} x_4 = 0 \\ \vdots \\ x_n = 0 \\ x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0 \end{cases}$ $\quad$ e $\Gamma_Z \subset Z$ è t.c.

$$\boxed{Sing(\Gamma) \cap Z = \phi}$$

Su $Z \cong \mathbb{P}^2$ le coord. omogenee sono $[x_0, x_1, x_2]$

dove $\Gamma_Z = \{x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 = 0\}$ e $rg(\Gamma_Z)$ max

$\Rightarrow \Gamma_Z$ irriducibile cioè $f|_Z \neq g_Z \cdot h_Z \Rightarrow f \neq g \cdot h$.

$rg(\Gamma) \geq 3 \Rightarrow \Gamma$ irrid.

~~Γ rid. $\Rightarrow rg(\Gamma) \leq 2$~~

~~Se invece $rg(\Gamma) \leq 2$, dal Lemma~~

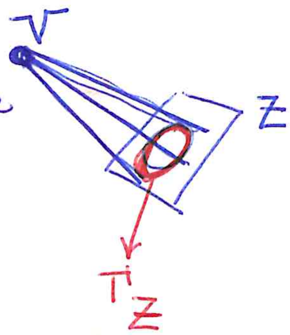
Per ogni punto di $Sing(\Gamma)$ e ogni punto di $\Gamma_Z \subset Z$, la retta per i 2 pti è tutta contenuta perché $Sing(\Gamma)$ luogo pti doppi $\Rightarrow$ 3 intersezioni.

Es. 7.2.13 In $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$ e Γ di rango r

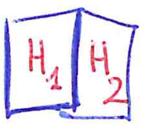
$r = 4$ $\quad \Gamma$ non deg. irrid. non sing

$r = 3$ $\quad \Gamma$ cono di vertice un punto di $\mathbb{P}^3_{\mathbb{C}}$

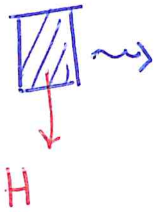
V = vertice che proietta su un $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sghembo una conica non singolare



$r = 2$ $\quad \Gamma = H_1 \cup H_2$



$r = 1$ $\quad \Gamma = 2H$



limite quando nel fascio di piani di asse $H_1 \cap H_2$ il piano H_2 va a coincidere con H_1

Def. 7.2.14 Sia $n \geq 2$

Sia $P \in \Gamma$ un punto semplice di Γ

$r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ passante per P si dice retta tangente a Γ in P

se

- o $r \subset \Gamma$
- oppure $\mathrm{mult}_P(r \cap \Gamma) = 2$ (e allora r non incontra altrove Γ)

Theorema 7.2.15 Sia $n \geq 2$

$P \in \Gamma$ punto semplice di una quadrica in $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

L'insieme delle rette tangenti a Γ in P forma un iperpiano di $\mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ di equaz. cartesiana

$$T_P(\Gamma) : \boxed{\underline{P}^t \cdot A \cdot \underline{x} = 0}$$ iperpiano tg. a Γ in $\underline{P}$

dim una retta $r \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ avere $\mathrm{mult}_P(r \cap \Gamma) = 2 \iff$

$\Omega_f(\underline{P}, \underline{x}) \equiv \underline{0} \iff \underline{P}^t A \underline{x} = \underline{0}$ equiv. $\underline{x}^t A \underline{P} = 0$

perché A simmetrica ∎

Corollario 7.2.16

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e $\underline{P} \in \Gamma$ punto semplice

$\exists!$ retta tg. a Γ nel fascio di rette di centro $\underline{P}$

ed è la retta di equazione cartesiana

$$\underline{P}^t A \underline{x} = 0 = f_0(\underline{P}) X_0 + f_1(\underline{P}) X_1 + f_2(\underline{P}) X_2$$

dove

$f_0(\underline{P}) = (a_{00} P_0 + a_{01} P_1 + a_{02} P_2)$

$f_1(\underline{P}) = (a_{01} P_0 + a_{11} P_1 + a_{12} P_2)$

$f_2(\underline{P}) = (a_{02} P_0 + a_{12} P_1 + a_{22} P_2)$

In particolare ritrovo che

$U_0 = [1,0,0] \in \Gamma$ è semplice $\Leftrightarrow$ I riga di A o I col. di A non id. nulla

altrimenti $f_0(U_0) = f_1(U_0) = f_2(U_0) = 0$ e $\nexists$ retta tg

analogo per U_1 e $U_2 \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Def 7.2.17

Un sp. $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ è tg. a Γ in un pto semplice $P \in \Gamma$ se e solo se $Z \subset T_P \Gamma$.

Z potrebbe essere pure tutto contenuto in Γ ma non $T_P(\Gamma)$ perché $P \in \Gamma \setminus Sing(\Gamma)$

Oss $Z \subset T_P(\Gamma)$ e considero $Z \cap \Gamma = \Gamma_Z \subseteq Z$

Poiché ogni retta r di Z per P è t.c.

o $r \in \Gamma_Z = \Gamma \cap Z$ (se $r \subset \Gamma$)

o $mult_P(\Gamma_Z \cap r) = 2$ (se $r \not\subset \Gamma$) perché $Z \subset T_P(\Gamma)$

$\Rightarrow$ $\boxed{P \text{ è sempre sing. per } \Gamma_Z}$

7.3 Polarità definita da $\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$

$\Gamma \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e $f(\underline{x}) = \underline{x}^t A \underline{x}$ non nec. in Γ

Def $P \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$, se $\underline{P}^t \cdot A \neq 0$, i.e. $A \cdot \underline{P} \neq \underline{0}$, i.e. $P \notin \mathrm{Sing}(\Gamma)$

L'iperpiano di equazione

$\Omega_f(\underline{P}, \underline{x}) = \underline{P}^t \cdot A \cdot \underline{x} = 0$ è detto iperpiano polare di P rispetto a Γ

e si denota con ω_P

P si dice Polo di ω_P

Prop 7.3.2

(a) $P \in \Gamma \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma) \iff \omega_P = T_P(\Gamma)$ e $P \in \Gamma$ — appartenenza

(b) Se $P \neq P' \in \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}} \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma)$ allora — reciprocità

$$P \in \omega_{P'} \iff P' \in \omega_P$$

(c) Se $Z \subset \mathbb{P}^n_{\mathbb{C}}$ e $P \in \Gamma_Z \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma_Z) \Rightarrow$ — sezione

$Z \not\subset \underset{T_P(\Gamma)}{\underset{\parallel}{\omega_P}}$ (cioè Z non è tg. a Γ in Z)

e $\omega_P \cap Z$ è l'iperpiano tg. a P in Γ_Z

dim (a) $P \in \Gamma \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma) \iff \underline{P}^t A \underline{x} = 0$ è eq. iperp. tg in P.

(b) $\underline{P} \in \omega_{P'} \iff (\underline{P}')^t \cdot A \underline{P} = 0 \underset{\substack{\downarrow \\ \text{Asimmetrica}}}{=} \underline{P}^t A \underline{P}' \iff \underline{P}' \in \omega_P$

In particolare per spazi tg. vale lo stesso.

(c) Poiché $P \in \Gamma_Z \setminus \mathrm{Sing}(\Gamma_Z) \Rightarrow Z \not\subset \omega_P = T_P(Z)$ perché

$P \in \Gamma_Z \subset \Gamma$ e $Z \cap \omega_P = Z \cap T_P Z$ sono le rette con molt $= 2$ in P

Pertanto, data $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ quadrica, resta indotta un'applicazione

$$\begin{aligned} \omega_\Gamma : \mathbb{P}^n \setminus \operatorname{Sing}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{P}^{n\vee} \\ \underline{P} &\longrightarrow \omega_P \\ [\underline{P}] &\longrightarrow [\underline{P}^t \cdot A \cdot \underline{x} = 0] \end{aligned}$$

Prop. 7.3.3 $\Gamma \subset \mathbb{P}^n$ quadrica con $f(\underline{x}) = \underline{0} = \underline{x}^t A \underline{x}$

Se $\operatorname{Sing}(\Gamma) = \emptyset$, i.e. $rg(\Gamma) = n+1$

$$\omega_\Gamma : \mathbb{P}^n \xrightarrow{\ \cong\ } (\mathbb{P}^n)^\vee$$

è una proiettività di matrice rappr. ρA, $\rho \in \mathbb{K}^*$

dim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^n &\longrightarrow (\mathbb{P}^n)^\vee \\ [P_0, \dots, P_n] &\longrightarrow [\text{coeff. di } \omega_P] \end{aligned}$$

ma coeff. di ω_P sono i coeff. ~~della~~ equazione

$$0 = \underline{P}^t A \underline{x} = \underline{x}^t A \underline{P} \quad \text{cioè} \quad [A \cdot \underline{P}]$$

$$\Rightarrow \omega_\Gamma = \rho A \quad \blacksquare$$

$\boxed{\text{Esempio}}$

$n = 1$ Γ non deg. $\underline{x}^t \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \underline{x} = 0$ con $ac - b^2 \neq 0$

$[P_0, P_1] \in \mathbb{P}^1$ definisce

$$(P_0 \ P_1) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} = 0 = (P_0 a + P_1 b \quad P_0 b + P_1 c) \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$= (P_0 a + P_1 b) x_0 + (P_0 b + P_1 c) x_1 = 0 : \omega_P$$

$$\mathbb{P}^1 \xrightarrow{\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_0 \\ P_1 \end{pmatrix}} \mathbb{P}^{1\vee}$$

$$[P_0, P_1] \longrightarrow [P_0 a + P_1 b, \ P_0 b + P_1 c] \quad \text{ok}$$

L' equazione lineare ha ! soluzione in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ che ③
è il punto

$$P' = [P_0 b + P_1 c, -(P_0 d + P_1 b)] \in \mathbb{P}^1$$

$\downarrow$

punto polare di P rispetto a Γ'

cioè $P' \in \omega_P$

Ma per reciprocità $P \in \omega_{P'}$ cioè P punto polare di P'

$\Rightarrow$ $\boxed{P \text{ e } P' \text{ sono coniugati rispetto a } \Gamma'}$

Def 7.3.4 $\omega_{\Gamma'}$ induce in questo modo anche

$$\omega_{\Gamma'} : \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^1$$
$$P \longrightarrow P'$$

$\omega_{\Gamma'} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^1)$ t.c. $\omega_{\Gamma'}(P') = \omega_{\Gamma'}(\omega_{\Gamma'}(P)) = P$

i.e. $\omega_{\Gamma'}^2 = id_{\mathbb{P}^1}$ Involuzione

Poichè Γ' non degenere $\Leftrightarrow$ $\Gamma' = B_0 + B_1$ con $B_0 \neq B_1$

e poichè

$$B_0 \in \omega_{B_0} \Rightarrow B_0' = B_0$$
$$B_1 \in \omega_{B_1} \Rightarrow B_1' = B_1$$

B_0 e B_1 pti fissi di $\omega_{\Gamma'}$ unici fissi per l'involuzione

Se $P \neq B_0, B_1$ $P' \neq P$ e i punti

P e P' si dicono coniugati armonici rispetto a B_0 e B_1

Motivo se mi metto in un riferimento di $\mathbb{P}^1$ t.c.

$B_0 = [1,0]$ e $B_1 = [0,1]$ e $P = [1,1]$ $\Rightarrow$

$$(B_0 B_1 P P') = [1,-1]$$ cioè la quaterna è armonica

<u>Esercizio</u> Se $B_0, B_1 \neq [0,1]$ considero nella carta affine $x = \frac{X_1}{X_0}$ t.c. $B_0 \rightsquigarrow x = b_0$ e $B_1 \rightsquigarrow x = b_1$

Se $P = [0,1]$ punto improprio di $\mathbb{A}^1_0 \Rightarrow P'$ coniugato armonico di P_∞ rispetto a $T' = \{b_0, b_1\} \subset \mathbb{A}^1_0$ è

$P' = \frac{b_0 + b_1}{2}$ punto medio affine tra B_0 e B_1.

<u>Osservazione 4.3.6</u>

estensione su $\mathbb{C}^2$ del prodotto scalare $\langle , \rangle$ su $\mathbb{R}^2$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ e $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$ piano euclideo $\langle , \rangle_S$ con coord (x,y)

$\Rightarrow \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} = \mathbb{P}(\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}})$ completamento proiettivo, cioè $x = \frac{X_1}{X_0}$ $y = \frac{X_2}{X_0}$

La retta impropria r_∞ di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$, cioè $\{X_0 = 0\}$, corrisponde a $(\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}})_\infty$ cioè <u>le direz. vett. in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$</u>

$\underline{v} = \binom{l}{m}$ è isotropo $\Leftrightarrow l^2 + m^2 = 0$

perciò $[0, l, m] \in r_\infty$ direz. isotropa $\Leftrightarrow$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono su $\begin{cases} X_0 = 0 \\ X_1^2 + X_2^2 = 0 \end{cases}$

La quadrica $\{X_1^2 + X_2^2 = 0\}$ in $r_\infty = \{X_0 = 0\}$ viene chiamata <u>ASSOLUTO</u> e $T_{r_\infty} = I^+ + I^-$ dove

$I^+ = [0, 1, i]$ e $I^- = [0, 1, -i]$ <u>punti ciclici</u>

e T_{r_∞} non degenere su r_∞

Preso $P = [0, l, m] \in r_\infty \setminus T_{r_\infty}$, il suo coniugato armonico è dato da $\begin{cases} X_0 = 0 \\ l X_1 + m X_2 = 0 \end{cases}$ cioè $P' = [0, m, -l]$

In altre parole

$P' \in r_\infty$ coniugato armonico di P rispetto all'assoluto corrisponde alla direz. ortogonale a P in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{C}}$

Retta polare in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Se $\Gamma_{\mathbb{C}} \subset \mathbb{P}^2$ conica nonsingolare abbiamo

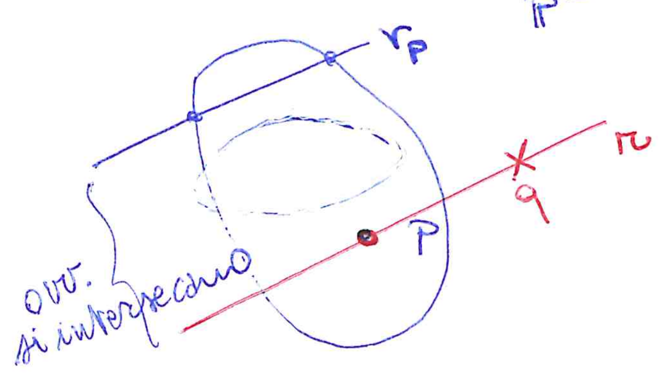
$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\ \omega_\Gamma\ } & \mathbb{P}^{2\vee} \\ P & \longrightarrow & \omega_P = r_P \\ \underline{P} & \longrightarrow & [\underline{P}^t A \underline{x}] = [\Omega_f(\underline{P}, \underline{x})] \end{array}$$

ω_P è retta polare di P rispetto a Γ

Già sappiamo che ω_Γ è proiettività di matrice ρA, $\rho \in \mathbb{K}$

(i) ogni retta r di $\mathbb{P}^2$ è retta polare per il suo polo P_r (ω_Γ è proiettività invertibile)

(ii) Se $r \subset \mathbb{P}^2$ è una retta $\Rightarrow$ $\omega_\Gamma(r) \subset (\mathbb{P}^2)^\vee$ deve essere una retta e ogni punto di $\omega_\Gamma(r)$ è un $[r_q]$, $\forall\, q \in r$



ora r è polare del suo polo $P_r \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

poiché $P \longleftrightarrow \omega_P = r_P$

$P_r \longleftrightarrow \omega_{P_r} = r$

ma $P \in r \underset{\text{reciprocità}}{\Rightarrow} P_r \in r_P = \omega_P$

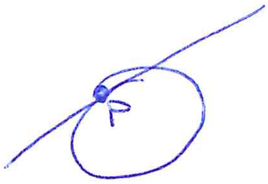
Ma allora $\forall\, q \in r \Rightarrow P_r \in r_q = \omega_q$

$\Rightarrow \omega_\Gamma(r) \subset (\mathbb{P}^{2\vee})$ è corrisponde al fascio di rette di $\mathbb{P}^2$ per P_r)

Osservazione 7.3.15 interpretaz. geom. della retta polare

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ non degenere e $P \in \mathbb{P}^2$

Se $P \in \Gamma$ $\Rightarrow r_P = \omega_P = T_P(\Gamma)$



Se $P \notin \Gamma$ $\Rightarrow r_P$ non può essere tg. a Γ in un punto $q \in \Gamma$ altrimenti r_P avrebbe come polo $q \neq P$

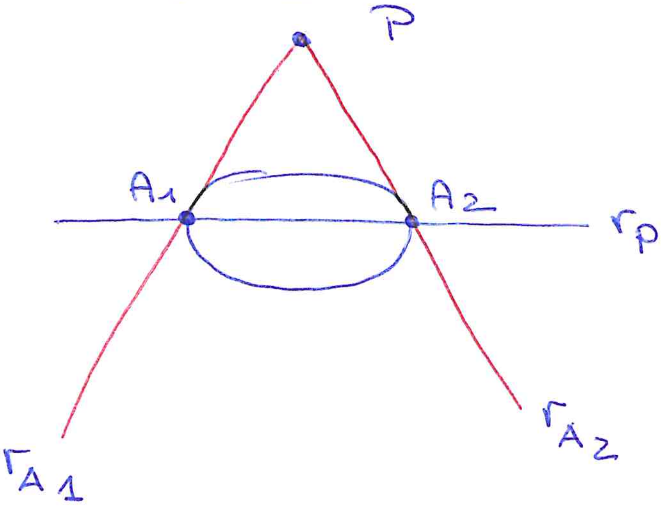
$\Rightarrow r_P \cap \Gamma = \{A_1, A_2\} \quad A_1 \neq A_2 \in \Gamma$

$$\begin{aligned} A_1 \in r_P &\Rightarrow P \in r_{A_1} \\ A_2 \in r_P &\Rightarrow P \in r_{A_2} \end{aligned} \Rightarrow \boxed{r_{A_1} \cap r_{A_2} = P}$$

ma poiché $A_1 \in \Gamma \Rightarrow r_{A_1} = T_{A_1}(\Gamma)$

$A_2 \in \Gamma \Rightarrow r_{A_2} = T_{A_2}(\Gamma)$

$\Rightarrow$ sono le uniche tg. a Γ uscenti da P cioè le uniche rette del fascio di centro P che sono tg. a Γ.



Infine,

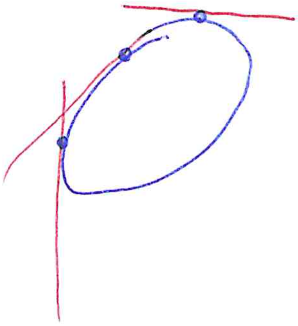
se $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è conica non degenere $\Rightarrow$

$$\omega_{\Gamma} : \mathbb{P}^2 \xrightarrow{\cong} \mathbb{P}^{2\vee}$$
$$P \longrightarrow \omega_P$$

Se $p \in \Gamma \Rightarrow \omega_p = T_p(\Gamma) \quad \Rightarrow$

$$\omega_{\Gamma}(\Gamma) := \bigcup_{p \in \Gamma} [T_p \Gamma] =$$ famiglia delle tangenti al variare di $p \in \Gamma$

$\mathbb{P}^2$



$$\longrightarrow \omega_{\Gamma}(\Gamma) \subset (\mathbb{P}^2)^{\vee}$$

$\omega_{\Gamma}(\Gamma)$ viene detta **CONICA DUALE DI Γ**

Esempio

Prendo Γ t.c. $f(\underline{x}) = x_0 x_2 - x_1^2 = 0$

$$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad rg(\Gamma) = 3$$

$[\lambda, \mu] \longrightarrow [\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2]$ quindi $x_0 x_2 - x_1^2 = 0$

Tutti i punti di Γ sono della forma $P_{\lambda,\mu} = [\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2]$

$\forall\, p \in \Gamma \Rightarrow \omega_p = T_p(\Gamma) = \underline{p}^t A \underline{x} = 0$

$$(\lambda^2, \lambda\mu, \mu^2) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff$$

$$\begin{pmatrix} \frac{\mu^2}{2} & -\lambda\mu & \frac{\lambda^2}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0 \iff T_p(\Gamma) = \frac{\mu^2}{2} x_0 - \lambda\mu x_1 + \frac{\lambda^2}{2} x_2 =$$

$\iff \mu^2 x_0 - 2\lambda\mu x_1 + \lambda^2 x_2 = 0 \Rightarrow [T_p(\Gamma)] = [\mu^2, -2\lambda\mu, \lambda^2] = [u_0, u_1, u_2]$

$\Rightarrow \omega_{\Gamma}(\Gamma) = \{u_1^2 - 4 u_0 u_2 = 0\}$