§4. Matrici quadrate e sistemi lineari.

Due matrici in $M_{n,n}(\mathbb{R})$ (stesso numero di righe e colonne) possono essere sia sommate che moltiplicate tra loro, inoltre il risultato che si ottiene è sempre una matrice in $M_{n,n}(\mathbb{R})$. In effetti $M_{n,n}(\mathbb{R})$, con le due operazioni di somma e prodotto, è un esempio di *anello unitario* (un anello è un oggetto algebrico che noi non studieremo). Non entreremo troppo in questioni algebriche, però alcune considerazioni le vogliamo fare.

Nella trattazione che segue la matrice identica ha un ruolo fondamentale. Ricordiamone la definizione: la matrice identica di ordine n, che si denota con I_n, è la matrice $n \times n$ che ha tutti 1 sulla *diagonale principale* e tutti zeri altrove:

$$I_n \quad := \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Osservazione 4.1. Risulta

$$A \cdot I_n \quad = \quad I_n \cdot A \quad = \quad A\,, \qquad \forall\, A \in M_{n,\,n}(\mathbb{R})$$

(questo comportamento di I_n rispetto al prodotto tra matrici è uno dei motivi per i quali si chiama matrice identica).

Definizione 4.2. Consideriamo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Se esiste B tale che $A \cdot B = I_n$ diciamo che A è *invertibile*, B la chiamiamo *inversa di* A e la denotiamo A^{-1}. Le matrici che **non** sono invertibili usualmente vengono chiamate *singolari*.

Proposizione 4.3. *Si ha che* $A \cdot B = I_n$ *se e solo se* $B \cdot A = I_n$. *L'inversa di una matrice, se esiste, è unica.*

Rimandiamo la dimostrazione di questa proposizione al paragrafo §16, in parte perché la vogliamo arricchire con dei commenti che coinvolgono argomenti che dobbiamo ancora trattare, in parte perché in questo momento non vogliamo appesantire il discorso (comunque, invitiamo lo studente a dare fin d'ora un'occhiata alla dimostrazione, ...se non altro perché ci siamo presi la briga di scrivere una dimostrazione che utilizza esclusivamente gli strumenti introdotti fin qui!).

Torniamo al sistema lineare $(\star)$ del paragrafo §1, ovvero al sistema:

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b} \tag{4.4}$$

Se il numero delle equazioni è uguale al numero delle incognite la matrice incompleta A è una matrice quadrata $n \times n$ mentre la matrice completa $\widetilde{A}$ è una matrice $n \times (n+1)$. Ora, assumiamo che la matrice A sia invertibile. Se $\vec{x}$ è una soluzione del "sistema (4.4)", allora moltiplicando ambo i membri della "uguaglianza (4.4)" per A^{-1}, si ottiene

$$A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b}\,.$$

Per l'associatività del prodotto, $A^{-1} \cdot (A \cdot \vec{x}) = (A^{-1} \cdot A) \cdot \vec{x} = I_n \cdot \vec{x} = \vec{x}$, quindi

$$\vec{x} \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b}\,. \tag{4.5}$$

Quest'uguaglianza mostra l'unicità dell'eventuale soluzione del nostro sistema e ci fornisce un candidato per tale soluzione. Poiché il passaggio effettuato è "invertibile": rimoltiplicando la (4.5) per A si torna alla (4.4), abbiamo l'esistenza della soluzione del sistema dato. Vista l'importanza, vogliamo ripetere il risultato appena dimostrato:

Proposizione 4.6. *Se $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ è una matrice invertibile allora il sistema lineare*

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

è compatibile ed ha un'unica soluzione. Inoltre, la soluzione è

$$\vec{x} \quad = \quad A^{-1} \cdot \vec{b}\,.$$

Osservazione 4.7. La richiesta dell'invertibilità di A è l'unica ipotesi della proposizione precedente. In particolare, le ipotesi di tale proposizione **non** coinvolgono affatto la colonna dei termini noti $\vec{b}$.

Il risultato può essere rafforzato, vale anche il "viceversa":

Proposizione 4.8. *Se il sistema lineare di n equazioni in n incognite*

$$A \cdot \vec{x} \quad = \quad \vec{b}$$

ha un'unica soluzione allora la matrice A è invertibile.

Nel § 7 vedremo che questo risultato segue in modo naturale dalla teoria che per allora avremo sviluppato. Ma, si sa, le dimostrazioni non servono (solo) a dimostrare i teoremi! ...ma anche a comprendere meglio gli strumenti coi quali si sta lavorando. La dimostrazione che segue vi servirà ad affinare la sensibilità sull'E.G. e sulla natura del prodotto di matrici.

Dimostrazione. Poiché il sistema ammette un'unica soluzione, l'E.G. sul sistema non deve produrre né parametri liberi né incompatibilità. Questo accade se e solo se la riduzione a scala di A produce un pivot su ogni elemento della diagonale, in particolare, indipendentemente da $\vec{b}$. Infatti, da un lato se

$$A \quad \sim \quad T$$

è una riduzione a scala di A, le stesse identiche operazioni effettuate sulla matrice completa $\widetilde{A} = A\,|\,\vec{b}$ (ad A viene agiunta la colonna $\vec{b}$) producono qualcosa del tipo

$$\widetilde{A} \;=\; A\,|\,\vec{b} \qquad \sim \qquad \widetilde{T} \;=\; T\,|\,\vec{d}$$

(una matrice $n \times n{+}1$ le cui prime n colonne sono esattamente le colonne di T). D'altro canto, la matrice a scala T ha elementi sulla diagonale **non** nulli (tutti) se e solo se $\widetilde{T}$ è del tipo desiderato, ovvero il sistema ad essa associato ammette un'unica soluzione.

Di conseguenza, se il sistema lineare dato $A\cdot\vec{x} = \vec{b}$ ammette un'unica soluzione, ciò accade per ogni sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{c}$ (i.e. con $\vec{c}$ arbitrario). A questo punto non solo siamo in grado di dimostrare l'invertibilità di A, ma siamo persino in grado di costruire l'inversa. Infatti, indicando con $\vec{e}_i$ la i^{-esima} colonna di I_n (che sarà quindi il vettore che ha tutti zeri eccetto un 1 nell'elemento di posto i), risulta che l'inversa di A è la matrice B la cui i^{-esima} colonna è la soluzione del sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$. Quanto appena affermato segue da com'è fatto il prodotto righe per colonne: la i^{-esima} colonna del prodotto $A \cdot B$ si ottiene facendo scontrare A con la i^{-esima} colonna di B, ma questa colonna, per come è stata costruita B, è la soluzione del sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{e}_i$. Questo dimostra che la i^{-esima} colonna di $A \cdot B$ è $\vec{e}_i$, quindi che $A \cdot B = I_n$. Detto in termini visivamente più intellegibili, si deve avere

$$A \cdot B \quad = \quad A \cdot \begin{pmatrix} & | & \\ \ldots & \vec{b}_i & \ldots \\ & | & \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} & | & \\ \ldots & \vec{e}_i & \ldots \\ & | & \end{pmatrix} \quad = \quad I_n\,.$$

□

L'esercizio che segue aiuta a comprendere meglio la dimostrazione appena vista.

Esercizio 4.9. Sia $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{pmatrix}$, $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Si risolvano i sistemi lineari

$$(\clubsuit) \qquad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_1 \, , \quad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_2 \, , \quad A \cdot \vec{x} = \vec{e}_3$$

e si scriva la matrice B le cui colonne sono, nell'ordine, le soluzioni dei tre sistemi lineari dati. Si verifichi che B è l'inversa di A.

Nella dimostrazione della Proposizione 4.8, così come nell'esercizio 4.9, utilizziamo i sistemi lineari per costruire l'inversa di una matrice. In realtà il lavoro al quale siamo interessati va esattamente nella direzione opposta: usare l'inversa di una matrice per risolvere, grazie alla Proposizione 4.6, i sistemi lineari. I prossimi tre paragrafi sono dedicati, tra le altre cose, a questo scopo.

Esercizio 4.10. Trovare l'errore nel ragionamento che segue. Consideriamo una matrice $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ (m righe, n colonne) e consideriamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$. Assumiamo per ipotesi che esista una matrice $B \in M_{n,m}(\mathbb{R})$ (questa volta, n righe, m colonne) tale che $B \cdot A = I_n$ (osserviamo che il prodotto $B \cdot A$ ha senso ed è una matrice di n righe e colonne). Procedendo come nel passaggio dalla (4.4) alla (4.5), abbiamo che

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad B \cdot A \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad I_n \cdot \vec{x} = B \cdot \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \vec{x} = B \cdot \vec{b}$$

Ne segue che abbiamo risolto il sistema lineare dato e che $\vec{x} = B \cdot \vec{b}$ ne è una soluzione, che pertanto risulta anche essere unica.

Il fatto che il risultato ottenuto sopra sia **falso** lo possiamo dimostrare con un esempio: se consideriamo il sistema lineare

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e la matrice} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & 8 & -5 \end{pmatrix}$$

(e, mantenendo le stesse notazioni del ragionamento di cui sopra, indichiamo con A la matrice incompleta del sistema e con $\vec{b}$ il vettore dei termini noti), abbiamo $B \cdot A = I_2$ (verificatelo, cioè svolgete il prodotto $B \cdot A$) nonché $B \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \end{pmatrix}$
...peccato che questo vettore (cioè la coppia $x = 1$, $y = 7$) non sia una soluzione del sistema lineare dato (fate la verifica)!

Che dire! ...chi non trova l'errore deve tornare alle Definizioni 1.8 e 1.9 e non può andare avanti fino a che non lo trova. È importante!

Comunque, a chi sta resistendo alla tentazione di andare a vedere il capitolo dedicato alla soluzione degli esercizi proposti (dove viene spiegato l'arcano) proponiamo un altro esercizio:

Esercizio 4.11. Il ragionamento dell'esercizio 4.10 non è tutto da buttare, dire cosa dimostra.

Il prossimo obiettivo è quello di studiare l'invertibilità e calcolare l'inversa di una matrice. A tal fine avremo bisogno della nozione di "determinante", oggetto di studio del prossimo paragrafo.

§5. Determinante.

In questo paragrafo introduciamo la funzione determinante, funzione che ad una matrice *quadrata* (cioè che ha uguale numero di righe e colonne) associa un numero. Ci sono diverse definizioni equivalenti del determinante, noi lo definiamo tramite lo sviluppo di Laplace (cfr. Def. 5.2 e Prop. 5.4). La formula (16.6′) e la Proposizione 16.8 forniscono altri due modi possibili di definire il determinante. Cominciamo con alcuni casi particolari.

Se $A = (a)$ è una matrice 1×1 si pone

$$\det(A) \quad := \quad a\ .$$

Se $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ è una matrice 2×2 si pone

$$\det(A) \quad := \quad ad - bc\ .$$

Per le matrici di ordine superiore la definizione è più complicata, ad esempio già per le matrici 3×3 si pone

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad := \quad aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg\ .$$

...ma vediamo la definizione generale! La definizione che segue è *induttiva*, nel senso che si definisce il determinante di una matrice di ordine n utilizzando il determinante di matrici di ordine più basso. Premettiamo una notazione.

Notazione 5.1. Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice. Indichiamo con $C_{i,j} \in M_{n-1,n-1}$ la matrice che si ottiene prendendo A e cancellando la i^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna. Ad esempio, $C_{1,2}$ è la sottomatrice in neretto:

$$\text{se} \qquad A \;=\; \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ \mathbf{7} & 2 & \mathbf{4} \\ \mathbf{8} & 6 & \mathbf{9} \end{pmatrix}\ , \qquad \text{si ha} \qquad C_{1,2} \;=\; \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

(cancelliamo prima riga e seconda colonna).

Definizione 5.2 (*Sviluppo di Laplace del Determinante*). Come abbiamo già menzionato, se $A = (a)$ è una matrice di ordine 1 si pone $\det A := a$. Sia quindi $n \geq 2$ e consideriamo $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si definisce

$$(5.2') \qquad \det A \quad := \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{1+j}\, a_{1,j} \cdot \det C_{1,j}\ ,$$

dove la notazione usata è quella appena introdotta.

Si osservi che l'uguaglianza (5.2′) definisce in maniera ricorsiva il determinante: si conosce il determinante delle matrici di ordine 1; quindi per la formula (5.2′) si sa calcolare il determinante delle matrici di ordine 2; conoscendo quest'ultimo, di nuovo per la formula (5.2′) si sa calcolare il determinante delle matrici di ordine 3; ...di quelle di ordine 4; ...eccetera.

Osservazione. Applicando l'uguaglianza (5.2′) per $n = 3$ si ottiene

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \quad &:= \quad a \cdot \det \begin{pmatrix} e & f \\ h & i \end{pmatrix} - b \cdot \det \begin{pmatrix} d & f \\ g & i \end{pmatrix} + c \cdot \det \begin{pmatrix} d & e \\ g & h \end{pmatrix} \\ &= \quad a \cdot (ei - fh) - b \cdot (di - fg) + c \cdot (dh - eg)\ , \end{aligned}$$

che coincide con la definizione data precedentemente.

Esempio. Si ha

$$\det\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&7\\1&4&6\end{pmatrix} \;:=\; 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&7\\4&6\end{pmatrix} - 5\cdot\det\begin{pmatrix}3&7\\1&6\end{pmatrix} + 3\cdot\det\begin{pmatrix}3&2\\1&4\end{pmatrix}$$
$$= 2\cdot(12-28) - 5\cdot(18-7) + 3\cdot(12-2) \quad = \quad -57\,.$$

Visto che ci siamo vediamo cosa si ottiene per le matrici di ordine 4:

$$\det\begin{pmatrix}a&b&c&d\\e&f&g&h\\i&l&m&n\\o&p&q&r\end{pmatrix} \;:=$$
$$a\cdot\det\begin{pmatrix}f&g&h\\l&m&n\\p&q&r\end{pmatrix} - b\cdot\det\begin{pmatrix}e&g&h\\i&m&n\\o&q&r\end{pmatrix} + c\cdot\det\begin{pmatrix}e&f&h\\i&l&n\\o&p&r\end{pmatrix} - d\cdot\det\begin{pmatrix}e&f&g\\i&l&m\\o&p&q\end{pmatrix}.$$

Si osservi che in questa espressione compaiono 4 determinanti di matrici 3×3, ognuno dei quali è un polinomio di 6 termini. Quindi, sviluppando i determinanti delle matrici di ordine 4 si perviene ad un polinomio costituito da $4\cdot 6 = 24$ termini. Lo sviluppo del determinante di una matrice di ordine 5 è un polinomio molto lungo: ha $5\cdot 24 = 120$ termini. Dalla Definizione 5.2 è evidente per ragioni induttive che questa considerazione si generalizza:

Osservazione 5.3. Per le matrici di ordine n, la funzione determinante è un polinomio di $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots\cdot n$ termini (questo prodotto si chiama *fattoriale* di n e si indica con $n!$, il punto esclamativo fa parte della notazione).

Vedremo comunque che il calcolo del determinante di una matrice è una operazione molto più semplice di quanto si possa immaginare ...e temere! Questo perché la funzione determinante soddisfa una serie di proprietà che ne rendono possibile il calcolo tramite l'eliminazione di Gauss. Proprietà che ora introduco.

Proposizione 5.4. *Il determinante di una matrice coincide col suo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga arbitraria, come pure rispetto ad una qualsiasi colonna: sia k un indice che fissiamo, si ha*

$$(5.4')\qquad \begin{aligned}\det A \;&=\; \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\cdot\det C_{k,j} \qquad &&\text{(sviluppo rispetto alla riga } k\text{)}\\ &=\; \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+k}\, a_{i,k}\cdot\det C_{i,k} \qquad &&\text{(sviluppo rispetto alla colonna } k\text{)}\end{aligned}$$

dove come al solito $C_{i,j}$ è la matrice che si ottiene prendendo A e sopprimendo la i^{-esima} riga e la j^{-esima} colonna.

La dimostrazione di questa proposizione verrà data negli approfondimenti, § 16, sezione "aspetti algebrici del determinantene" (lo studente che lo desideri, può leggerla fin d'ora).

Esempio. Sviluppando rispetto alla seconda riga il determinante dell'esempio precedente si ottiene

$$\det\begin{pmatrix}2&5&3\\3&2&7\\1&4&6\end{pmatrix} \;:=\; -3\cdot\det\begin{pmatrix}5&3\\4&6\end{pmatrix} + 2\cdot\det\begin{pmatrix}2&3\\1&6\end{pmatrix} - 7\cdot\det\begin{pmatrix}2&5\\1&4\end{pmatrix}$$
$$= -3\cdot(30-12) + 2\cdot(12-3) - 7\cdot(8-5) \quad = \quad -57\,.$$

Come promesso dalla formula (5.4′) il risultato ottenuto è lo stesso di prima: -57.

Esercizio. Calcolare il determinante della matrice dell'esempio tramite lo sviluppo di Laplace rispetto alla terza colonna.

Definizione 5.5. Il prodotto $(-1)^{i+j} \cdot \det C_{i,j}$ si chiama *complemento algebrico* di $a_{i,j}$.

Osservazione 5.6. Alla luce di questa definizione, la Proposizione 5.4 ci dice che il determinante di una matrice è uguale alla somma degli elementi di una qualsiasi riga o colonna moltiplicati per i propri complementi algebrici.

Ora osserviamo che se B è la matrice ottenuta da una matrice A scambiando due righe adiacenti, la i^{-esima} riga con la $(i{+}1)^{-esima}$ riga, la matrice che si ottiene da A cancellando la i^{-esima} riga coincide con la matrice che si ottiene da B cancellando la $(i{+}1)^{-esima}$ riga. Quindi, per effetto del coefficiente $(-1)^{i+j}$ che appare nella Definizione 5.5, i complementi algebrici degli elementi della i^{-esima} riga di A coincidono con i complementi algebrici degli elementi della $(i+1)^{-esima}$ riga di B cambiati di segno. Ne segue che lo sviluppo di Laplace di A rispetto alla i^{-esima} riga coincide con lo sviluppo di Laplace di B rispetto alla $(i{+}1)^{-esima}$ riga cambiato di segno. Quanto affermato può sembrare complicato, in realta non lo è affatto, l'esempio che segue aiuta a comprenderlo: posto

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & 8 & 9 \\ \mathbf{4} & \mathbf{5} & \mathbf{6} \end{pmatrix},$$

quando si cancellano le righe in neretto, quello che resta della matrice A coincide con quello che resta della matrice B, ma mentre "i segni" (cfr. Definizione 5.5) dei complementi algebrici degli elementi della riga in neretto di A sono dei $(-1)^{2+j}$, abbiamo che "i segni" dei complementi algebrici degli elementi della riga in neretto di B sono dei $(-1)^{3+j}$.

Come conseguenza di quanto appena osservato, la possibilità garantitaci dalla Proposizione 5.4 di poter calcolare il determinante effettuando lo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga arbitraria, ci dice che se in una matrice scambiamo due righe adiacenti allora il determinante cambia segno. Questo risultato si generalizza allo scambio di due righe arbitrarie.

Lemma 5.7. Il determinante è una funzione *antisimmetrica* delle righe di una matrice: se scambiamo tra loro due righe qualsiasi il determinante cambia segno.

Dimostrazione. Lo scambio di due righe arbitrarie si può effettuare con un certo numero di scambi di righe adiacenti e questo numero è necessariamente dispari (questo è un dettaglio di teoria delle permutazioni che dimostriamo negli approfondimenti, § 16). Pertanto il Lemma segue da quanto osservato precedentemente. □

Esempio. Scambiando prima e terza riga tra loro il determinante cambia segno:

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 3 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si osservi che lo scambio tra prima e terza riga si può effettuare scambiando la prima con la seconda, poi la seconda con la terza e poi di nuovo la prima con la seconda:

$$\text{“}1\,2\,3\text{”} \rightsquigarrow \text{“}2\,1\,3\text{”} \rightsquigarrow \text{“}2\,3\,1\text{”} \rightsquigarrow \text{“}3\,2\,1\text{”}$$

(questi scambi sono tre, come previsto dalla teoria delle permutazioni sono in numero dispari).

Il determinate di una matrice $n \times n$ è una funzione che dipende da n^2 variabili (gli elementi di una tale matrice). Possiamo immaginare di fissare tutti gli elementi di una matrice tranne quelli che si trovano su una data riga, in questo modo otteniamo una funzione che dipende solo da n variabili, quelle della riga in questione. Il lemma che segue ci dice come si comporta il determinante visto in questo modo, appunto come funzione degli elementi di una data riga.

Lemma 5.8. Il determinante è una funzione *multilineare* delle righe della matrice: sia k un indice di riga, λ un numero reale e siano A, A', A'' e B quattro matrici tali che

$$\begin{array}{ll} a_{i,j} = a'_{i,j} = a''_{i,j} = b_{i,j}\,, & \forall\, i \neq k\,,\ \forall\, j\,; \\ a_{k,j} + a'_{k,j} = a''_{k,j}\,, & \forall\, j\,; \\ b_{k,j} = \lambda a_{k,j}\,, & \forall\, j\,. \end{array}$$

(cioè coincidono ovunque tranne che per il fatto che la k^{-esima} riga di A'' è la somma della k^{-esima} riga di A con quella di A', mentre la k^{-esima} riga di B è il prodotto della k^{-esima} riga di A per λ). Allora

$$\begin{aligned} \det A + \det A' &= \det A''\,; \\ \det B &= \lambda \cdot \det A\,. \end{aligned}$$

Questo enunciato sembra poco digeribile per via dell'uso degli indici. In realtà il lemma è molto semplice, ci sta dicendo che se fissiamo tutti gli elementi di una matrice eccetto quelli di una data riga, la funzione determinante, <u>come funzione di quella riga</u>, è lineare. ...ma è meglio dirlo con due esempi:

Esempio.

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{2\lambda} & \mathbf{5\lambda} \\ -7 & 3 \end{pmatrix} = \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ -7 & 3 \end{pmatrix}\,;$$

$$\det\begin{pmatrix} \mathbf{2{+}3} & \mathbf{5{+}1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{5} \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Esempio.

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ \mathbf{3\lambda} & \mathbf{2\lambda} & \mathbf{7\lambda} \end{pmatrix} = \lambda\cdot\det\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 5 & 9 \\ \mathbf{3} & \mathbf{2} & \mathbf{7} \end{pmatrix}\,;$$

$$\det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{5{+}1} & \mathbf{2{+}3} & \mathbf{4{+}7} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{5} & \mathbf{2} & \mathbf{4} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 \\ 1 & 9 & 5 \\ \mathbf{1} & \mathbf{3} & \mathbf{7} \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Calcolare i determinanti delle matrici indicate negli esempi.

Si noti che, in particolare, il determinante della matrice ottenuta moltiplicando una riga di A per il coefficiente λ (la matrice B del lemma precedente) è uguale a $\lambda\cdot\det A$.

Osservazione 5.9. Sia A una matrice di ordine n e sia λA la matrice che si ottiene moltiplicando tutti gli elementi di A per la costante λ. Poiché moltiplicare tutta la matrice per λ è come moltiplicare ognuna delle sue n righe per λ, abbiamo

$$\det\big(\lambda A\big) = \lambda^n\cdot\det A\,.$$

Dimostrazione (del Lemma 5.8). Poiché le matrici coincidono fuori della k^{-esima} riga, calcolando il determinante utilizzando lo sviluppo di Laplace proprio rispetto alla k^{-esima} riga (formula 5.5), si ottiene

$$\begin{aligned} \det A + \det A' &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a_{k,j}\cdot\det C_{k,j} + \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, a'_{k,j}\cdot\det C_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, \big(a_{k,j} + a'_{k,j}\big)\cdot\det C_{k,j} \\ &= \det A''\,. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \det B &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, b_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\ &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j}\, \lambda \cdot a_{k,j} \cdot \det C_{k,j} \\ &= \lambda \cdot \det A'' \,. \end{aligned}$$

□

Proposizione 5.10. *Si abbia* $A = (a_{i,j}) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. *Si ha*

$$\det A \quad = \quad \det {}^{t}A$$

dove ${}^{t}A$ *è la matrice trasposta della matrice* A (def. 3.18).

Dimostrazione. Questa proposizione segue dalla Proposizione 5.4. Infatti, confrontando lo sviluppo di Laplace rispetto ad una riga con lo sviluppo di Laplace rispetto alla corrispondente colonna della trasposta, ci accorgiamo che si tratta della stessa identica formula! □

Osserviamo che, come corollario, i Lemmi 5.7 e 5.8 continuano a valere qualora si sostituisca (ovunque) la parola "riga" alla parola "colonna".

Ricapitoliamo alcune proprietà utili per il calcolo del determinante di una matrice:

Proposizione 5.11. *Sia* A *una matrice quadrata. Si ha che*

a) *se scambiamo tra loro due righe di* A *il determinante cambia segno* (*quindi se* A *ha due righe uguali il suo determinante è nullo*)*;*

b) *se ad una riga* (*ovvero colonna*) *sommiamo una combinazione lineare delle altre il determinante non cambia;*

c) *se moltiplichiamo una riga* (*ovvero colonna*) *per una costante* λ, *il corrispondente determinante risulta moltiplicato per* λ;

d) *se* A *ha una riga* (*ovvero colonna*) *nulla, allora* $\det A = 0$;

e) *il determinante di una matrice triangolare superiore è uguale al prodotto degli elementi sulla diagonale.*

Dimostrazione. Le proprietà (a) e (c) le abbiamo già dimostrate (Lemmi 5.7 e 5.8). La (d) segue dal fatto che si può calcolare il determinante effettuando lo sviluppo di Laplace rispetto a una riga (ovvero colonna) qualsiasi, in particolare rispetto a quella nulla. Anche la (e) segue dalla natura dello sviluppo di Laplace (si scriva lo sviluppo rispetto all'ultima riga). La (b) segue dai Lemmi 5.7 e 5.8: se si somma ad una riga un multiplo di un'altra (se poi si vuole sommare una combinazione lineare delle altre righe basta iterare questo passaggio), il corrispondente determinante viene sommato a un multiplo del determinante di una matrice che ha due righe uguali e che, per questo motivo, è nullo (qui sotto, chiariamo quello che abbiamo appena detto con un esempio). □

Esempio.

$$\det\begin{pmatrix} 3+\mathbf{9}\lambda & 2+\mathbf{4}\lambda & 5+\mathbf{8}\lambda \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix} \mathbf{9}\lambda & \mathbf{4}\lambda & \mathbf{8}\lambda \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix}$$

$$= \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} + \lambda\det\begin{pmatrix} \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \\ 1 & 6 & 7 \\ \mathbf{9} & \mathbf{4} & \mathbf{8} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 7 \\ 9 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

(la prima matrice si ottiene dall'ultima matrice sommando alla prima riga λ volte la terza riga. Il conto ci mostra che queste due matrici hanno lo steso determinante).

Esempio. Per le proprietà dell'osservazione 5.11 sappiamo che

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} -3 & 8 & 9 \\ 4 & 7 & -3 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{(abbiamo scambiato prima e terza riga);}$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ 11 & 33 & -2 \end{pmatrix}$$ (alla terza riga abbiamo sommato la combinazione lineare di coefficienti 2 e 3 delle prime due righe);

$$5\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & 7 & -3 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 20 & 35 & -15 \\ -3 & 8 & 9 \end{pmatrix}; \qquad \det\begin{pmatrix} 13 & 4 & -7 \\ 0 & 0 & 0 \\ -3 & 11 & 4 \end{pmatrix} = 0\,;$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & 7 & 1 & 8 \\ 0 & 4 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3\cdot 4\cdot(-6)\cdot 2 = -144\,.$$

Osservazione. Le operazioni di cui ai punti (5.11.a) e (5.11.b) sono sufficienti per ridurre in forma triangolare superiore la matrice A, infatti basta eseguire l'algoritmo di Gauss descritto nella dimostrazione della Proposizione 2.11. D'altro canto, per la (5.11.e), sappiamo calcolare facilmente il determinante di una matrice triangolare superiore. Quanto appena osservato permette di calcolare il determinante di una matrice, nell'esempio che segue vediamo concretamente come.

Esempio. Utilizzando i passi (5.11.a) e (5.11.b) troviamo

$$\det\begin{pmatrix} 0 & 77 & 33 & 88 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{pmatrix} =^{(1)} 11\cdot\det\begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 & 8 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{pmatrix} =^{(2)}$$

$$-11\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & -4 & 5 \\ -3 & 8 & 15 & 23 \end{pmatrix} =^{(3)} -11\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & -7 & 0 & -3 \\ 0 & 14 & 12 & 29 \end{pmatrix} =^{(4)}$$

$$-11\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 13 \end{pmatrix} =^{(5)} -11\cdot\det\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 7 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = -11\cdot(1\cdot 7\cdot 3\cdot 3) = -693$$

dove: (1) abbiamo diviso la prima riga per 11; (2) abbiamo scambiato le prime due righe; (3) alla terza riga abbiamo sottratto quattro per la prima riga ed alla quarta riga abbiamo sommato il triplo della prima; (4) alla terza riga abbiamo sommato la seconda ed alla quarta abbiamo sottratto il doppio della seconda; (5) alla quarta riga abbiamo sottratto il doppio della terza.

Per le proprietà a), b) e c) della Proposizione 5.11 che ci dicono cosa accade al determinante di una matrice quando si effettuano i passi dell'E.G., abbiamo quanto segue:

L'annullarsi del determinante è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G.

(nel senso che se $\widetilde{A}$ si ottiene da A tramite l'E.G., l'una ha determinante nullo se e solo se l'altra ha determinante nullo). Ai fini di quanto affermato ci si ricordi del fatto che l'E.G. consente di moltiplicare le righe di una matrice solo per costanti non nulle (cfr. Definizione 2.1).

Proposizione 5.12. *Sia A una matrice quadrata. Si ha che*

$$detA = 0 \quad \text{se e solo se} \quad \text{una riga di } A \text{ è combinazione lineare delle altre.}$$

Dimostrazione. Come appena osservato, l'annullarsi del determinante è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G., anche l'avere una riga che è combinazione lineare delle altre è una proprietà invariante rispetto ai passi dell'E.G.. D'altro canto, per le matrici a scala, queste due proprietà sono equivalenti (in quanto entrambe equivalenti all'avere l'ultima riga nulla). In definitiva, se $\widetilde{A}$ è una riduzione a scala di A possiamo affermare quanto segue

$$\begin{array}{rcll} detA = 0 & \iff & & \\ det\widetilde{A} = 0 & \iff & \text{una riga di } \widetilde{A} \text{ è c.l. delle altre} \\ & \iff & \text{una riga di } A \text{ è c.l. delle altre} \end{array}$$

Ciò conclude la dimostrazione. □

Il determinante si comporta molto male rispetto all'operazione di somma di matrici (non esistono formule per il calcolo del determinante di una somma di matrici). Rispetto al prodotto, invece, il determinante si comporta nel modo migliore possibile: vale il teorema che segue.

Teorema 5.14 (Binet). *Siano A e B due matrici quadrate. Allora*

$$\det\big(A\cdot B\big) \quad = \quad (\det A)\cdot(\det B)\ .$$

Nel paragrafo § 16 dedicato agli approfondimenti vedremo due dimostrazioni del Teorema di Binet (rimandiamo la dimostrazione non perché sia difficile ma perché a questo punto della teoria ci interessano soprattutto le conseguenze di questo Teorema). Vedremo anche che questo Teorema può essere dedotto come conseguenza di una interpretazione geometrica del determinante della quale daremo qualche cenno nel paragrafo § 16 (cfr. Inciso 16.16) e sulla quale torneremo anche nel Capitolo II (§§1 e 4).

Nel prossimo paragrafo ci occupiamo del calcolo dell'inversa di una matrice (se questa è invertibile). Concludiamo osservando che come conseguenza del teorema di Binet, una matrice il cui determinante è nullo non può essere invertibile. Infatti, se, per assurdo, lo fosse, allora si avrebbe

$$1 \quad = \quad \det I_n \quad = \quad \det\big(A\cdot A^{-1}\big) \quad = \quad \big(\det A\big)\cdot\big(\det A^{-1}\big) \quad = \quad 0\ .$$

In inciso, vedremo che le matrici a determinante nullo sono le uniche matrici non invertibili.

Esercizio 5.15. Calcolare il determinante delle matrici che seguono

$$\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 3 & 271 & 583 \\ 0 & 1 & 49 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4729 & 1 & 0 \\ 357 & 9041 & 5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 237 \\ 2 & 795 & 9467 \end{pmatrix} .$$

Esercizio 5.16. Calcolare il determinante (in funzione del parametro k) delle matrici che seguono ed indicare per quali valori di k non sono invertibili.

$$\begin{pmatrix} k & k+1 \\ 2-k & 3k-5 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} k & 3k & -k \\ -1 & 2 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} k & -1 & 5 \\ 3k & 2 & 6 \\ -k & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \quad \begin{pmatrix} 2-k & 3k-7 & -k+71 \\ 0 & k^2-11 & 23-k^3 \\ 0 & 0 & k-8 \end{pmatrix} .$$

§6. Matrici invertibili e inversa di una matrice.

Come già osservato alla fine del paragrafo precedente, dal teorema di Binet segue che se A è una matrice invertibile, allora

$$\det A \neq 0 .$$

Viceversa, se $\det A \neq 0$, allora A è invertibile ed esiste una formula che ne calcola l'inversa. Tale formula è contenuta nel teorema che segue:

Teorema 6.1. *Consideriamo $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$. Si ha che A è invertibile se e solo se $\det A \neq 0$. In questo caso risulta*

$$\left(A^{-1}\right)_{i,j} = (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} ,$$

dove come al solito $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la $j^{\text{-esima}}$ riga e la $i^{\text{-esima}}$ colonna.

Attenzione! Non ci siamo sbagliati: a sinistra dell'uguaglianza abbiamo scritto "i, j", a destra abbiamo scritto "j, i".

Osservazione. La formula del Teorema 6.1 ci dice che A^{-1} è la trasposta della matrice dei complementi algebrici (cfr. Definizione 5.5) divisi per il determinante di A.

Avendo già provato che se A è invertibile allora $\det A \neq 0$, per concludere la dimostrazione del Teorema è sufficiente calcolare il prodotto di A per la matrice indicata nel Teorema e verificare che il risultato è la matrice identica. Tale calcolo lo svolgiamo nel paragrafo §16.

Esempio. Determiniamo l'inversa della matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.

Poiché $\det A = 2$, la matrice A è invertibile. La matrice dei complementi algebrici è la matrice

$$\begin{pmatrix} \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ -\det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ -4 & 5 \end{pmatrix} \\ \det\begin{pmatrix} 12 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & -\det\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} & \det\begin{pmatrix} -1 & 12 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -6 & 19 \\ -4 & 14 & -43 \\ -4 & 12 & -37 \end{pmatrix} .$$

Dividendo per $\det A$ si ottiene la matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 19/2 \\ -2 & 7 & -43/2 \\ -2 & 6 & -37/2 \end{pmatrix}$. Infine, trasponendo quest'ultima matrice si ottiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix} .$$

La formula del Teorema 6.1 non è molto pratica, per calcolare l'inversa di una matrice di ordine tre abbiamo dovuto fare molte operazioni. Tra poco vedremo che utilizzando l'algoritmo di Gauss è possibile calcolare l'inversa di una matrice abbastanza rapidamente.

Esercizio. Verificare che $\begin{pmatrix} -1 & 12 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ -4 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -3 & 7 & 6 \\ 19/2 & -43/2 & -37/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio 6.2. Calcolare l'inversa delle matrici che seguono utilizzando la formula del Teorema 6.1.

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 5 \\ -3 & 1 & -8 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 7 & 1 & 8 \\ 4 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 7 & 8 & 1 \\ 1 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -4 & 5 \\ 3 & -2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 6 & 2 & 6 & 2 \\ 5 & 0 & -3 & -1 \\ 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

Si verifichi inoltre la correttezza dei risultati ottenuti. Ricordiamo che per verificare che due matrici sono l'una l'inversa dell'altra è sufficiente moltiplicarle tra loro, come risultato si deve ottenere la matrice identica (Definizione 4.2 e Proposizione 4.3).

Ora vediamo in che modo l'eliminazione di Gauss può essere utilizzata per calcolare l'inversa di una matrice. Sia $A = \left(a_{i,j}\right) \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice invertibile, la ricetta da seguire per calcolare A^{-1} consiste dei passi indicati nell'algoritmo seguente.

Algoritmo (di calcolo dell'inversa di una matrice tramite l'E.G.).

i) si scrive la matrice $n \times 2n$ costituita da due blocchi $n \times n$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

(qui abbiamo preso $n = 4$ esclusivamente per non appesantire le notazioni);

ii) con i passi dell'eliminazione di Gauss si trasforma la matrice considerata fino ad ottenere la matrice identica al posto del primo blocco $n \times n$;

iii) si ricopia il secondo blocco $n \times n$: tale blocco è l'inversa di A.

Esempio 6.3. Calcoliamo l'inversa della matrice $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix}$. A tal fine scriviamo

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 18 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -9 & -22 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim^{(2)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(3)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim^{(4)}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 8 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -6 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right),$$

dove: 1) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della prima riga ed alla terza riga abbiamo sommato il quadruplo della prima riga; 2) alla terza riga abbiamo sommato la seconda; 3) alla seconda riga abbiamo sottratto il triplo della terza; 4) alla prima riga abbiamo sottratto il doppio della seconda ed il quintuplo della terza. L'inversa della matrice data è la matrice $\begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Esercizio. Verificare l'uguaglianza

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 7 & 18 \\ -4 & -9 & -22 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & -1 & 1 \\ -6 & -2 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Esercizio. Calcolare, utilizzando il metodo descritto, l'inversa delle matrici indicate nell'esercizio 6.2. ...dovreste ritrovare gli stessi risultati trovati precedentemente!

Inciso 6.4. Il motivo per cui questo metodo funziona è presto detto. Scelto un vettore numerico $\vec{b}$, alla matrice a blocchi $(A|I)$, dove I denota la matrice identica, associamo il sistema lineare $A\cdot\vec{x} = I\cdot\vec{b}$. Ai passi che trasformano la matrice $(A|I)$ nella matrice $(I|B)$ corrisponde il fatto di trasformare il sistema lineare $A\cdot\vec{x} = I\cdot\vec{b}$ nel sistema lineare $I\cdot\vec{x} = B\cdot\vec{b}$. Poiché i passi dell'eliminazione di Gauss non cambiano la classe di equivalenza di un sistema lineare, i due sistemi lineari $A\cdot\vec{x} = I\cdot\vec{b}$ e $I\cdot\vec{x} = B\cdot\vec{b}$, cioè

$$A\cdot\vec{x} = \vec{b} \qquad\qquad \text{e} \qquad\qquad \vec{x} = B\cdot\vec{b},$$

sono equivalenti. Poiché questa equivalenza vale per ogni scelta di $\vec{b}$, la matrice B deve necessariamente essere l'inversa di A. Questa affermazione oltre ad essere molto ragionevole si dimostra come segue: dall'equivalenza dei due sistemi lineari si deduce, sostituendo la seconda equazione nella prima, $A\cdot B\cdot\vec{b} = \vec{b}$, sempre per ogni scelta di $\vec{b}$; ne segue che deve essere $A\cdot B = I_n$, cioè che B è l'inversa di A. Infatti, quanto appena affermato segue dal Lemma 6.5.

Lemma 6.5. Sia C una matrice $n\times n$. Allora,

$$\text{se } C\cdot\vec{b} = \vec{b} \text{ per ogni } \vec{b}, \quad \text{allora } C = I_n \quad \text{(la matrice identica).}$$

Dimostrazione. Indicando con $\vec{e}_i$ la i^{-esima} colonna di I_n, si deve avere $C\cdot\vec{e}_i = \vec{e}_i$, d'altro canto il prodotto $C\cdot\vec{e}_i$ non è altro che la i^{-esima} colonna di C. □

Nel paragrafo § 12 daremo una interessante chiave di lettura di questo Lemma in termini dell'applicazione lineare associata ad una matrice.

§7. Teorema di Cramer.

Torniamo a considerare il sistema lineare

$$A\vec{x} \quad = \quad \vec{b}\,, \qquad A \in M_{n,n}(\mathbb{R})\,.$$

Osservazione 7.1 Sia $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ una matrice quadrata a scala. Per Proposizione 5.11, proprietà e), il determinante $\det A$ è il prodotto degli elementi sulla diagonale. Inoltre, se $a_{k_0,k_0} = 0$ per un qualche indice k_0, si ha anche $a_{k,k} = 0$ per ogni $k > k_0$ (altrimenti A non sarebbe a scala). Pertanto le condizioni

i) $\det A \neq 0$; $\qquad$ ii) $a_{n,n} \neq 0$; $\qquad$ iii) $a_{k,k} \neq 0\,,\ \forall\, k$;

sono equivalenti tra loro.

Lemma 7.2. *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *una matrice quadrata a scala. Il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ha una unica soluzione se e solo se* $\det A \neq 0$.

Dimostrazione. Poiché A è a scala, abbiamo a che fare con un sistema lineare a scala del tipo

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 \;+\; \dots \quad \dots & = \; b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 \;+\; \dots & = \; b_2 \\ \qquad\qquad \dots & \\ \qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n & = \; b_n \end{cases}.$$

Se $\det A \neq 0$, per l'osservazione 7.1 gli elementi $a_{1,1}, ..., a_{n,n}$ sulla diagonale principale sono non nulli. Ne segue che tale sistema si risolve (partendo dall'ultima equazione e tornando indietro) senza produrre parametri liberi né incompatibilità.
Viceversa, nel caso risulti $\det A = 0$, e quindi $a_{n,n} = 0$ (sempre per l'osservazione 7.1), ci sono due possibilità: il sistema è incompatibile oppure è compatibile. Nell'ipotesi che si verifichi questo secondo caso, l'ultima equazione deve essere l'equazione $0 = 0$ (se fosse $b_n \neq 0$ il nostro sistema sarebbe incompatibile) ed il sistema in questione è in realtà un sistema, compatibile per ipotesi, di al più $n-1$ equazioni in n incognite; il metodo visto nel paragrafo §2 di "soluzione all'indietro" di un tale sistema a scala produce almeno un parametro libero e quindi infinite soluzioni (in effetti già x_n è un parametro libero).
In definitiva, abbiamo provato che nel caso risulti $\det A = 0$, il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni. □

Teorema 7.3. *Sia* $A \in M_{n,n}(\mathbb{R})$ *una matrice quadrata (non richiediamo che sia a scala). Il sistema lineare* $A\vec{x} = \vec{b}$ *ha una unica soluzione se e solo se* $\det A \neq 0$.

In particolare, questo Teorema ci dice che la proprietà di avere una unica soluzione non dipende da $\vec{b}$, cioè basta conoscere la matrice incompleta A per poter dire quale delle due seguenti eventualità si verifica:

i) il sistema ammette una unica soluzione;

ii) il sistema è incompatibile oppure ammette infinite soluzioni.

Dimostrazione. Effettuando la riduzione a scala di un sistema lineare quadrato si ottiene, in particolare, un sistema la cui matrice incompleta è a scala. Il determinante della matrice ottenuta è non nullo se e solo se $\det A \neq 0$, infatti i passi dell'E.G. non inficiano l'annullarsi o meno del determinante. Per il lemma precedente abbiamo concluso. □

Analizziamo le due possibilità da un altro punto di vista. Come prima, consideriamo il sistema lineare $A \cdot \vec{x} = \vec{b}$.

Caso 1: $\det A \neq 0$. L'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ segue anche[3] dal Teorema 6.1: nel paragrafo § 5 abbiamo osservato che l'esistenza dell'inversa di A garantisce l'esistenza e l'unicità della soluzione del sistema lineare: si ha $\vec{x} = A^{-1}\vec{b}$.

Caso 2: $\det A = 0$. Per la Proposizione 5.12, l'annullarsi del determinante è equivalente a che una riga sia combinazione lineare delle altre. Di conseguenza, abbiamo la stessa dicotomia incontrata studiando il sistema (1.3): o il termine noto corrispondente a quella riga di A non è compatibile con la combinazione lineare, cosa che rende il sistema lineare incompatibile, oppure tutta l'equazione corrispondente a quella riga è combinazione lineare delle altre equazioni e questo, di fatto, significa avere meno di n equazioni (il che significa avere infinite soluzioni oppure, comunque, incompatibilità; di sicuro, dalla stessa E.G. si evince che un sistema di meno di n equazioni in n incognite non può avere un'unica soluzione).

Si osservi che come conseguenza si ottiene una seconda dimostrazione del fatto che la matrice incompleta di un sistema quadrato che ammette un'unica soluzione è una matrice invertibile (cfr. Proposizione 4.8):

$$\exists! \text{ soluzione di } A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad \Longrightarrow \quad \det A \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad A \text{ è invertibile.}$$

Teorema 7.4 (Cramer). *Consideriamo il sistema lineare $A\vec{x} = \vec{b}$ ed assumiamo $\det A \neq 0$. Sia quindi $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ la soluzione (che esiste ed è unica per il Teorema precedente). Si ha*

$$x_i \quad = \quad \frac{\det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}}{\det A},$$

dove $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ è la matrice che si ottiene sostituendo la $i^{\text{-esima}}$ colonna di A con il vettore dei termini noti $\vec{b}$.

Osservazione 7.5. Nel caso $n = 2$, ad esempio nel caso del sistema (1.3)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad = \quad \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix},$$

questo Teorema si riduce alla formula (1.6):

$$x \quad = \quad \frac{\det\begin{pmatrix} \lambda & b \\ \mu & d \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}, \qquad y \quad = \quad \frac{\det\begin{pmatrix} a & \lambda \\ c & \mu \end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}.$$

Esempio. Risolviamo il sistema lineare

$$\begin{cases} 3x + 3y + 4z = 19 \\ 5x + 6y - 7z = 13 \\ 7x + 9y - 17z = -31 \end{cases}.$$

Il determinante della matrice incompleta è 3, quindi la soluzione esiste ed è unica. Si ha

$$x = \frac{\det\begin{pmatrix} 19 & 3 & 4 \\ 13 & 6 & -7 \\ -31 & 9 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad y = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 19 & 4 \\ 5 & 13 & -7 \\ 7 & -31 & -17 \end{pmatrix}}{3}, \quad z = \frac{\det\begin{pmatrix} 3 & 3 & 19 \\ 5 & 6 & 13 \\ 7 & 9 & -31 \end{pmatrix}}{3}.$$

[3] Oltre che dal ragionamento nella dimostrazione del Teorema 7.3.

Esercizio. Risolvere il sistema lineare (utilizzando il teorema di Cramer)

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 19 \\ -3x - 5y + 7z = 13 \\ -2x - 3y + 13z = -31 \end{cases} .$$

Del teorema di Cramer ne espongo due dimostrazioni (sono entrambe molto brevi, ma, almeno la seconda, concettualmente delicata).

Dimostrazione #1. Poiché $\vec{x} = A^{-1} \cdot \vec{b}$, abbiamo che x_i è il prodotto della "i-esima riga di A^{-1}" per $\vec{b}$:

$$x_i = \sum_j (A^{-1})_{i,j} \cdot b_j = \sum_j (-1)^{i+j} \cdot \frac{\det C_{j,i}}{\det A} \cdot b_j ,$$

dove la seconda uguaglianza segue dalla formula del Teorema 6.1 (come al solito, $C_{j,i}$ è la matrice ottenuta da A sopprimendo la j-esima riga e la i-esima colonna). L'espressione trovata è esattamente il quoziente tra lo sviluppo di Laplace del determinante della matrice $A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i}$ rispetto alla i-esima colonna (quella dove appare il vettore dei termini noti $\vec{b}$) e $\det A$. □

Dimostrazione #2. Denotiamo con $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$ la matrice che si ottiene sostituendo la i-esima colonna della matrice identica I con il vettore delle incognite $\vec{x}$. Risulta

$$A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} = A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} . \tag{7.6}$$

Infatti, svolgendo il prodotto righe per colonne $A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$, quando la riga α di A si scontra con la colonna β di $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$, se $\beta \neq i$ si ottiene $a_{\alpha,\beta}$, mentre se la riga α di A si scontra proprio con la i-esima di $I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}$ (cioè col vettore $\vec{x}$) si ottiene b_α (che è l'elemento di posto α del vettore $\vec{b}$). A questo punto possiamo scrivere la seguente catena di uguaglianze:

$$\det A_{\vec{b}/\mathrm{col}\, i} \underset{(1)}{=} \det\big(A \cdot I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}\big) \underset{(2)}{=} (\det A) \cdot (\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i}) \underset{(3)}{=} (\det A) \cdot x_i ,$$

dove la (1) si ottiene prendendo il determinante dell'equazione (7.6), la (2) segue dal teorema di Binet, infine la (3) segue dal fatto che $\det I_{\vec{x}/\mathrm{col}\, i} = x_i$.
Dividendo per $\det A$ i termini alle due estremità della nostra catena di uguaglianze si ottiene l'uguaglianza di Cramer, ciò conclude la dimostrazione. □

Esercizio 7.7. Risolvere il sistema lineare

$$\begin{cases} x + 3y - z = 1 \\ 2x + 7y + 2z = 2 \\ x + 4y + 5z = 3 \end{cases}$$

utilizzando

i) il metodo di Gauss;

ii) il calcolo dell'inversa della matrice incompleta A nonché la formula (4.5);

iii) il teorema di Cramer.

Se il risultato che vi viene non è sempre lo stesso ... rifate i conti!!!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & k & k-6 & 3k & 2k+12 \\ 0 & 0 & -1 & k+4 & -3 & 2k+8 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & -4 & 12 \\ -9 & k & -3k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & k & k & k & k & k \\ 0 & 0 & k & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & k & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & k \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1-k \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1-k & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k^2+k \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ k^3+k^2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1-k \\ 0 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} k & k \\ k & k \\ k & k \end{pmatrix}.$$

Sebbene la riduzione a scala rappresenti il modo più rapido per calcolare il rango di una matrice è bene conoscere un importante risultato noto come “Teorema degli Orlati”. Per affermare che il rango di una matrice è maggiore o uguale di un certo intero k è sufficiente trovare un minore invertibile di ordine k. D'altro canto per limitare dall'alto il rango di una matrice, ad esempio per provare che questo è minore o uguale di k, dovremmo verificare che tutti i minori di ordine maggiore o uguale di $k+1$ non siano invertibili. Il teorema che segue ci dice, rendendo meno pesante tale verifica, che è sufficiente guardare solo “alcuni” minori della nostra matrice: quelli ottenuti “orlando” un minore invertibile.

Teorema 9.11 (degli orlati). *Sia $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ una matrice e sia B un minore invertibile di ordine k. Se i minori di ordine $k+1$ contenenti B non sono invertibili allora*

$$\mathrm{rg}(A) \quad = \quad k$$

Dimostrazione. È sufficiente provare che se il rango di A è maggiore di k allora esiste un minore invertibile di ordine $k+1$ contenente il minore B.
Sia V lo spazio generato dalle colonne di A. Risulta $\dim V \geq k+1$. D'altro canto le colonne individuate da B sono indipendenti e, non potendo generare V, non generano almeno una delle colonne esterne a B. In questo modo individuiamo $k+1$ colonne indipendenti contenenti le colonne individuate da B. Sia ora A' la matrice costituita da queste colonne. Questa ha rango $k+1$ (Teorema 9.6) e contiene B come suo minore invertibile. Applicando lo stesso argomento di prima, ma questa volta ragionando per righe, individuiamo $k+1$ righe di A' che sono indipendenti nonché contengono le righe di B.
Le $k+1$ righe e colonne di A così individuate costituiscono un minore come richiesto. □

Si noti che l'argomento esposto non solo dimostra l'esistenza di un minore invertibile di ordine $k+1$ contenente B ma esibisce anche un algoritmo per individuarlo.

Come dimostra l'esercizio che segue, punto a), il passaggio “restrizione ad A'” è fondamentale.

Esercizio 9.12.

a) Scrivere una matrice $A \in M_{3,3}(\mathbb{R})$ avente due righe indipendenti, due colonne indipendenti, il cui minore M individuato da quelle due righe e colonne **non** è invertibile.

b) Dimostrare che se A è una matrice soddisfacente le condizioni in a), allora risulta (necessariamente) $\mathrm{rango}\, A = 3$, $\mathrm{rango}\, M = 1$.

Esercizio. Sia A una matrice 7×8 e sia B un minore invertibile di ordine 4. Verificare che ci sono 1380 minori di ordine maggiore o uguale a 5 (1176 di ordine 5, 196 di ordine 6, 8 di ordine 7), dei quali solamente 12 di ordine 5 contenenti B ...un bel risparmio!