4.7 Isometrie e cambiamenti di riferimento.

Siano $\mathbb{E}$ e $\mathbb{E}'$ spazi euclidei.

Definizione 4.7.1. Una affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}'$ si dice una *congruenza* o *isometria* se l'applicazione lineare associata $\varphi_l : \mathbf{V}(\mathbb{E}) \to \mathbf{V}(\mathbb{E}')$ è un omomorfismo metrico (cfr. [1], cap. 18, par. 3) ossia se per ogni coppia $(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in \mathbf{V}(\mathbb{E}) \times \mathbf{V}(\mathbb{E})$ si ha

$$\varphi_l(\mathbf{v}) \times \varphi_l(\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{w} \tag{4.54}$$

Dal corollario (18.12) di [1] segue che φ_l è una applicazione iniettiva e dunque ogni congruenza è iniettiva. In particolare una congruenza tra spazi della stessa dimensione è un isomorfismo. Per definizione, inoltre, le congruenze conservano il coseno degli angoli e le distanze. Ciò giustifica il nome di isometrie dato alle congruenze.

Definizione 4.7.2. Se $\mathbb{E}$ è uno spazio euclideo di dimensione n, le congruenze di $\mathbb{E}$ in sè formano un sottogruppo, che denoteremo col simbolo $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$, del gruppo affine Aff $(\mathbb{E})$. Le isometrie che sono pure affinità dirette si dicono *movimenti dello spazio* $\mathbb{E}$ e formano un sottogruppo $Mov(\mathbb{E})$ di $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$.

Osservazione 4.7.3. Sia $\mathcal{R}$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale di $\mathbb{E}$ e consideriamo l'equazione matriciale

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} + \mathbf{c} \tag{4.55}$$

di una affinità φ di $\mathbb{E}$ in sè in $\mathcal{R} = (O, R)$. La matrice $\mathbf{A}$ non è altro che la matrice di φ_l nel riferimento ortonormale R di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$. Dunque φ appartiene a $\mathcal{I}s\,(\mathbb{E})$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale $\mathbf{O}(n, \mathbb{R})$ e φ appartiene a $Mov(\mathbb{E})$ se e solo se $\mathbf{A}$ appartiene al gruppo ortogonale speciale $\mathbf{SO}(n, \mathbb{R})$ (cfr. [1], cap. 21, par. 3).

In particolare, se $\mathcal{R} = (O, R)$ e $\mathcal{R}' = (O', R')$ sono riferimenti cartesiani monometrici ortogonali di $\mathbb{E}$, le formule del cambiamento di riferimento nel passaggio da $\mathcal{R}$ a $\mathcal{R}'$ sono del tipo (4.55), con $\mathbf{A}$ matrice ortogonale, che risulta diretta o inversa a seconda che R e R' siano concordi o discordi.

Esempio 4.7.4. **Isometrie di una retta.** Sia $\mathbb{A}$ una retta euclidea e ne sia φ una affinità. Fissato un riferimento cartesiano monometrico $\mathcal{R} = (O, \mathbf{v})$, l'equazione di φ in $\mathcal{R}$ si scrive come $y = ax + c$. L'affinità φ è una isometria se e solo se $a = \pm 1$, ed è un movimento se e solo se $a = 1$. Dunque i movimenti di una retta euclidea sono tutte e sole le traslazioni. Invece le congruenze che non sono movimenti hanno equazione del tipo $y = -x + c$. Queste, al contrario delle traslazioni, hanno uno, e un solo, punto fisso, precisamente il punto avente in $\mathcal{R}$ coordinata $x = c/2$. Se si assume questo punto come origine del riferimento, la congruenza viene ad avere equazione $y = -x$, ossia è la simmetria rispetto all'unico punto fisso.

Esempio 4.7.5. **Simmetria ortogonale o riflessione rispetto ad un iperpiano.** Siano $\mathbb{E}$ uno spazio euclideo e π un iperpiano fissato. Per ogni punto P, si consideri la retta r_P per P e ortogonale a π. Detto H_P il punto di intersezione tra π e r_P, resta univocamente determinato il punto $P' \in r_P$ tale $\mathbf{H_P P} = -\mathbf{H_P P'}$. Il punto P' è detto *simmetrico ortogonale* di P rispetto all'iperpiano π. La posizione $\varphi(P) = P'$ definisce una affinità di $\mathbb{A}$ in sè, detta *simmetria ortogonale* (o *riflessione*) rispetto all'iperpiano π, rispetto alla quale tutti i punti di π sono fissi. L'iperpiano π è detto *iperpiano di simmetria* per φ; se π è una retta (e quindi lo spazio euclideo ha dimensione 2), viene detto anche *asse di simmetria*.

4.8 Isometrie di un piano euclideo

Definizione 4.8.1. Sia φ una isometria del piano euclideo $\mathbb{E}$ in sè che fissa un punto O di $\mathbb{E}$, ossia tale che $\varphi(O) = O$. L'isometria φ si dice una *rotazione* se è un movimento, una *riflessione o ribaltamento* se non è un movimento ma solo una congruenza.

Vediamo il motivo di questa terminologia.

Scegliamo un riferimento $\mathcal{R} = (O, R)$ cartesiano monometrico ortogonale di $\mathbb{E}$ di origine O e scriviamo l'equazione matriciale (4.55) di φ in $\mathcal{R}$ che ora assume la forma $\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x}$, dove $\mathbf{A}$ è una matrice ortogonale di ordine 2. Si dimostra facilmente (cf. [1], esempio 21.9) che la matrice $\mathbf{A}$, se è diretta, assume la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.56}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$ che si dice *angolo della rotazione* φ. Indicati con $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ i vettori del riferimento R, se la matrice $\mathbf{A}$ è diretta, risulta che α è proprio l'angolo formato da $\mathbf{e}_1$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_1) = cos\,\alpha\,\mathbf{e}_1 + sen\,\alpha\,\mathbf{e}_2$. Lo stesso vale per l'angolo formato da $\mathbf{e}_2$ e $\varphi_l(\mathbf{e}_2) = -sen\,\alpha\,\mathbf{e}_1 + cos\,\alpha\,\mathbf{e}_2$. Più in generale, per ogni punto P di $\mathbb{A}$, i vettori $\mathbf{OP}$ e $\mathbf{O}\boldsymbol{\varphi}\mathbf{(P)}$ formano un angolo α.

Se invece $\mathbf{A}$ è inversa, assume allora la forma

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} cos\,\alpha & sen\,\alpha \\ sen\,\alpha & -cos\,\alpha \end{pmatrix} \tag{4.57}$$

con $\alpha \in [0, 2\pi)$; si mostra facilmente che i punti della retta

$$r : x = t\,(cos\alpha + 1), y = t\,sen\,\alpha$$

sono fissi per φ, mentre ogni punto della retta $x = -t\,sen\,\alpha, y = t\,(cos\alpha + 1)$, passante per l'origine e ortogonale a r, verifica la relazione $\varphi(x, y) = (-x, -y)$. La φ è quindi una riflessione (o simmetria ortogonale) rispetto all'asse r (cfr. [1], cap. 18, es. 18.7 (e)). Per una opportuna scelta del riferimento monometrico ortogonale R (cioè utilizzando un riferimento con la stessa orientazione di R e avente come primo vettore del riferimento un versore della retta fissa), la matrice $\mathbf{A}$ assume la forma

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{4.58}$$

ossia le equazioni di φ in un opportuno riferimento cartesiano monometrico ortogonale sono del tipo

$$x' = x, y' = -y\,. \tag{4.59}$$

In generale una congruenza φ di $\mathbb{A}$ in sè risulta composta di una traslazione e di una rotazione, oppure di una traslazione e di una riflessione ortogonale, a seconda che sia diretta o inversa.

Si noti che in generale, se $\mathbb{E}$ è uno spazio euclideo di dimensione n e φ è una congruenza che fissa un punto O, il corollario (21.41) di [1] chiarisce la struttura di φ, che risulta composta di un certo numero di rotazioni in piano mutuamente ortogonali e un certo numero di simmetrie ortogonali rispetto a iperpiani ortogonali ai suddetti piani.

Definizione 4.8.2. Una *glissoriflessione* è una isometria φ del piano euclideo ottenuta componendo la riflessione avente per asse una retta r e una traslazione non identica lungo un vettore parallelo ad r.

Una glissoriflessione è dunque una isometria inversa priva di punti fissi.

La discussione precedente mostra la prima asserzione del seguente Teorema che fornisce una classificazione delle isometrie piane:

Teorema 4.8.3. (Chasles) *Una isometria del piano euclideo che fissa almeno un punto, è una rotazione se è diretta, mentre è una riflessione se è inversa.*
Una isometria del piano euclideo che non fissa nessun punto, è una traslazione se è diretta, mentre è una glissoriflessione se è inversa.

Concludiamo con il seguente teorema classico:

Teorema 4.8.4. *Sia $\mathbb{E}$ il piano euclideo. Ogni sottogruppo finito non banale di $\mathcal{I}s(\mathbb{E})$ è isomorfo a $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, per qualche $n \geq 3$, oppure a uno dei gruppi diedrali D_{2n}, $n \geq 1$.*

Entrambi i teoremi verranno dimostrati nei Complementi.

4.9 Isometrie in uno spazio euclideo di dimensione 3

Sia $\mathbb{E}$ uno spazio affine euclideo di dimensione 3 e sia $\mathcal{R} = (O, R = [\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3])$ un riferimento cartesiano monometrico ortogonale per $\mathbb{E}$.

Definizione 4.9.1. Si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}_1$ l'affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ le cui equazioni nel riferimento $\mathcal{R}$ sono date da:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.60}$$

I punti della retta passante per O e parallela a $\mathbf{v}_1$ sono tutti e soli i punti fissi per φ, se α non è un multiplo intero di 2π. La retta dei punti fissi viene detta anche *asse della rotazione*. Si osservi che la matrice $\mathbf{A}$ è ortogonale speciale, e dunque φ è un movimento di $\mathbb{E}$.

Più in generale, se $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, una affinità $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ si dice *rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore* $\mathbf{v}$ se, comunque si completi $\mathbf{v}$ ad una base ortogonale R' di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ con la stessa orientazione di R, le equazioni di φ in (O, R') sono come in (4.60). Questo equivale a dire che, se $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ sono le equazioni di φ in $\mathcal{R}$, si ha

$$\mathbf{B} = \mathbf{M}_{RR'} \mathbf{A} \mathbf{M}_{RR'}^{-1} \qquad \text{ove } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\alpha & -sen\,\alpha \\ 0 & sen\,\alpha & cos\,\alpha \end{pmatrix}. \tag{4.61}$$

e le colonne di $\mathbf{M}_{RR'}$ sono formate dalle coordinate dei vettori di R' nel riferimento R. Si osservi che, di nuovo, la matrice $\mathbf{B}$ è ortogonale speciale. Fissato il riferimento, si può definire φ anche nel modo seguente:

$$\varphi(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{v} + (\mathbf{x} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{v})\, \mathbf{x}) \cos\alpha + (\mathbf{x} \wedge \mathbf{v}) \sin\alpha. \tag{4.62}$$

Per esempio, se il vettore $\mathbf{v}$ è parallelo a $(1,1,1)$, allora la formula per φ diventa:

$$\varphi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \cos\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \frac{\sin\alpha}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} y-z \\ z-x \\ y-x \end{pmatrix} + \frac{1-\cos\alpha}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

E' possibile dimostrare, viceversa, che le rotazioni di centro O attorno ad un vettore di $\mathbf{V}(\mathbb{E})$ sono tutte e sole le isometrie che hanno in $\mathcal{R}$ equazioni del tipo $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{B}$ matrice ortogonale speciale:

Proposizione 4.9.2. *Sia $\varphi : \mathbb{E} \to \mathbb{E}$ una isometria che ha in $\mathcal{R}$ equazioni $\mathbf{y} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{x}$ con $\mathbf{B}$ matrice ortogonale speciale. Allora esistono un angolo α e un versore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E})$ tali che φ è la rotazione di centro O di angolo α intorno al vettore $\mathbf{v}$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{A}$ la matrice ortogonale diretta associata a φ_l in un riferimento monometrico ortogonale. L'applicazione φ_l porta versori in versori, quindi gli autovalori di $\mathbf{A}$ devono essere numeri (reali o complessi) di modulo 1. Siccome $\mathbf{A}$ è di ordine 3×3, il polinomio caratteristico $p(t)$ di $\mathbf{A}$ è un polinomio di terzo grado in t e dunque ammette sicuramente almeno una radice reale $\lambda = \pm 1$. Affermiamo che $\lambda = 1$ è un autovalore di $\mathbf{A}$. Da ciò seguirà che un autovettore $\mathbf{v}$ relativo all'autovalore 1 definisce un asse fisso per φ. L'isometria indotta sul piano ortogonale a $\mathbf{v}$ risulta necessariamente essere una congruenza diretta, e dunque la rotazione di un angolo α, come si voleva. Supponiamo dunque per assurdo che -1 sia l'unico autovalore reale di $\mathbf{A}$. Indichiamo gli altri due autovalori di $\mathbf{A}$, che sono numeri complessi coniugati, con λ e $\bar{\lambda}$. Allora $\lambda\bar{\lambda} = \|\lambda\|^2 = 1$, come abbiamo già osservato, e il determinante di $\mathbf{A}$ è

$$\det(\mathbf{A}) = (-1)\lambda\bar{\lambda} = (-1)\|\lambda\|^2 = -1$$

contraddicendo l'ipotesi che $\mathbf{A}$ sia ortogonale diretta. $\square$

Esempio 4.9.3. Denotiamo con $\mathbb{E}^3$ lo spazio affine numerico $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$, con prodotto scalare euclideo e riferimento standard $\mathcal{R}$. Si vogliono determinare le equazioni della rotazione φ di angolo $\pi/3$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ orientata da $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. La rotazione φ può essere descritta come la composizione

$$\varphi = T_P \circ \varphi' \circ T_{-P} \tag{4.63}$$

ove con T_P (risp., T_{-P}) si indichi la traslazione di passo $P \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (risp., $-P$), e con φ' la rotazione di $\pi/3$ attorno al versore $\mathbf{v}$. (La stessa descrizione vale per una qualunque scelta di P in l.)

Completo $\mathbf{v}$ ad una base ortonormale positivamente orientata R' di $M(3,1,\mathbb{R})$; ad esempio, $R' = [\mathbf{v}, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]$. Risulta:

$$M_{R'}(\varphi_l') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos\,\pi/3 & -sen\,\pi/3 \\ 0 & sen\,\pi/3 & cos\,\pi/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1/2 \end{pmatrix};$$

$$\mathbf{M}_R(\varphi_l') = \mathbf{M}_{RR'}\mathbf{A}\mathbf{M}_{RR'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Si ricavano le equazioni di φ in $\mathcal{R}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{x} - P) + P \tag{4.64}$$

cioè

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - 2 \\ x_2 - 1 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{4.65}$$

Fissato il riferimento $\mathcal{R}$, le rotazioni attorno agli assi coordinati permettono di descrivere la struttura di tutte le rotazioni di centro O dello spazio euclideo di dimensione 3, grazie ad un fondamentale teorema di Eulero, detto *dei tre angoli*. Il teorema di Eulero mostra che ogni trasformazione ortogonale diretta che fissa il punto O è la composizione di tre rotazioni, determinate dai tre angoli ψ, ϕ e θ:

Teorema 4.9.4. (Eulero) *Ogni rotazione φ di centro O è della forma*

$$\varphi = R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi$$

dove ϕ, θ e ψ sono angoli, detti di Eulero*, tali che*

$$0 \leq \psi, \phi < 2\pi, \qquad 0 \leq \theta \leq \pi$$

e con R^i_α si denoti la rotazione di centro O e angolo α attorno all'i-simo versore $\mathbf{v_i}$ del riferimento. In particolare gli angoli ψ, θ e ϕ sono univocamente determinati da φ.

Dimostrazione. La rotazione φ è una isometria e preserva l'orientazione, ed è dunque completamente determinata dalle immagini dei vettori $\mathbf{v_1}$ ed $\mathbf{v_3}$. Osserviamo che sono univocamente individuati gli angoli $0 \leq \theta \leq \pi$ e $0 \leq \phi < 2\pi$ tali che

$$\varphi(\mathbf{v}_3) = R^3_\phi \circ R^1_\theta(\mathbf{v}_3) :$$

θ e ϕ sono detti rispettivamente *latitudine* e *longitudine* di $\varphi(\mathbf{v}_3)$. Posto ora $R' = R^3_\phi \circ R^1_\theta$, si ha che $R'(\mathbf{v}_1)$ e $R(\mathbf{v}_1)$ sono vettori che giacciono nel piano perpendicolare a $R(\mathbf{v}_3)$ e formano un angolo ψ, con $0 \leq \psi < 2\pi$; ne segue che

$$R^3_\phi \circ R^1_\theta \circ R^3_\psi(\mathbf{v}_1) = R(\mathbf{v}_1).$$

Poiché la rotazione R^3_ψ lascia fisso $\mathbf{v}_3$, segue la tesi. □

La classificazione delle isometrie dello spazio euclideo di dimensione 3 comprende, oltre a rotazioni, riflessioni e traslazioni, anche altri tre tipi di isometria: le glissoriflessioni, le glissorotazioni e le riflessioni rotatorie.

Definizione 4.9.5. Una *glissoriflessione* è la composizione di una riflessione con una traslazione non identica in una direzione parallela al piano di simmetria della riflessione.

Una *glissorotazione* è la composizione di una rotazione con una traslazione in una direzione parallela all'asse di rotazione.

Una *riflessione rotatoria* è la composizione di una rotazione con la riflessione rispetto a un piano perpendicolare all'asse di rotazione.

Esercizi svolti

IL PRODOTTO SCALARE

Problema 4.1. *a) Dimostra che* $(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \times (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = |\mathbf{v}|^2 - |\mathbf{w}|^2$.
b) Dimostra che $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$.

Soluzione. a) Per la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare,

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w}) \times (\mathbf{v}-\mathbf{w}) = \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{w} \times \mathbf{v} - \mathbf{v} \times \mathbf{w} - \mathbf{w} \times \mathbf{w} = \mathbf{v} \times \mathbf{v} - \mathbf{w} \times \mathbf{w}.$$

b) Si sfruttano la bilinearità e la simmetria del prodotto scalare.

Problema 4.2. *I vettori* $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}$ *di lunghezza* $|\mathbf{v}|$ = *4,* $|\mathbf{w}|$= *5,* $|\mathbf{u}|$ =*3 rispettivamente, soddisfano alla condizione* $\mathbf{v}+\mathbf{w}+\mathbf{u} = 0$. *Determina* $\mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

Soluzione. Dalla relazione di dipendenza lineare si ricava che $\mathbf{w} = -\mathbf{v} - \mathbf{u}$ e

$$\begin{aligned} 25 = \mathbf{w} \times \mathbf{w} &= (-\mathbf{v} - \mathbf{u}) \times (-\mathbf{v} - \mathbf{u}) \\ &= \mathbf{v} \times \mathbf{v} + \mathbf{u} \times \mathbf{u} + 2\mathbf{v} \times \mathbf{u} \\ &= 16 + 9 + 2\mathbf{v} \times \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Si ricava che $\mathbf{v} \times \mathbf{u} = 0$ e che i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono tra loro ortogonali. Dunque,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \times \mathbf{w} + \mathbf{w} \times \mathbf{u} + \mathbf{u} \times \mathbf{v} &= \mathbf{w} \times (\mathbf{v}+\mathbf{u}) + \mathbf{u} \times \mathbf{v} \\ &= -\mathbf{w} \times \mathbf{w} = -25. \end{aligned}$$

Problema 4.3. *Determina i versori ortogonali a* $\mathbf{v} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ *e* $\mathbf{w} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3k$.

Problema 4.4. *Dimostra che un quadrilatero piano è un rettangolo se e solo se le diagonali hanno uguale lunghezza.*

Soluzione. Ricorda la relazione $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \frac{1}{4}[|\mathbf{v}+\mathbf{w}|^2 - |\mathbf{v}-\mathbf{w}|^2]$ mostrata nel'Esercizio svolto probtipo:4.aa1, e osserva che $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ e $\mathbf{v}-\mathbf{w}$ sono le diagonali del parallelogramma di lati $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Imponendo l'uguaglianza delle diagonali, si ricava che $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$, cioè che due lati consecutivi sono ortogonali e il parallelogramma è un rettangolo. Viceversa, lo stesso ragionamento mostra che la condizione di ortogonalià $\mathbf{v} \times \mathbf{w} = 0$ implica che le diagonali hanno uguale lunghezza.

DISTANZE E RETTE IN $\mathbb{E}^3$

Si consideri uno spazio euclideo $\mathbb{E}^3$ di dimensione 3, dotato di un riferimento monometrico ortonormale $\mathcal{R} = (O, (\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}))$.

Problema 4.5. Distanza punto-piano *Sia* α *il piano di equazione cartesiana* $2x - 3y + 6z - 3 = 0$ *nel sistema di riferimento fissato. Calcola la distanza del punto* $A(2, -1, 2)$ *dal piano* α.

Soluzione. Il punto A non appartiene al piano α, perchè sostituendo le sue coordinate nell'equazione di α si trova $2 \cdot 2 - 3(-1) + 6 \cdot 2 - 3 = 16$. Applicando la Proposizione 4.5.14, si ricava che la distanza tra A e α è $D(A, \alpha) = \frac{|16|}{\sqrt{4+9+36}} = \frac{16}{\sqrt{49}} = \frac{16}{7}$.

Problema 4.6. Lunghezza del prodotto vettoriale *Siano assegnati i vettori* $\mathbf{v}(l, m, n)$ *e* $\mathbf{v}'(l', m', n')$. *Mostra che*

$$|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'| = \sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|} \tag{4.66}$$

dove $\mathbf{A}$ *è la matrice*

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \tag{4.67}$$

Soluzione. Si osservi che l'esercizio è un caso particolare della formula elencata subito prime della formula (4.19). Il prodotto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t = \begin{pmatrix} \mathbf{v} \times \mathbf{v} & \mathbf{v} \times \mathbf{w} \\ \mathbf{v} \times \mathbf{w} & \mathbf{w} \times \mathbf{w} \end{pmatrix}$ ha determinante

$$\begin{aligned} det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t) &= (\mathbf{v} \times \mathbf{v})(\mathbf{w} \times \mathbf{w}) - (\mathbf{v} \times \mathbf{w})^2 \\ &= (l^2 + m^2 + n^2)(l'^2 + m'^2 + n'^2) - (ll' + mm' + nn')^2, \end{aligned}$$

mentre il prodotto esterno

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}' = det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} = (mn' - nm')\mathbf{i} - (ln' - nl')\mathbf{j} + (lm' - ml')\mathbf{k} \tag{4.68}$$

ha norma $(mn' - nm')^2 + (ln' - nl')^2 + (lm' - ml')^2$. Svolgendo i calcoli, si prova l'asserto.

Problema 4.7. Retta ortogonale e incidente due rette sghembe. *Siano* $\mathbb{S}$ *e* $\mathbb{S}'$ *due rette sghembe di uno spazio euclideo* $\mathbb{E}$ *di dimensione 3. Esiste una ed una sola retta* $\mathbb{S}''$ *ortogonale ad* $\mathbb{S}$ *ed* $\mathbb{S}'$ *ed incidente sia* $\mathbb{S}$ *che* $\mathbb{S}'$.

Soluzione. Siano $\mathbb{S} = P+ < \mathbf{v} >$ e $\mathbb{S}' = P'+ < \mathbf{v}' >$. Il complemento ortogonale $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$ di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$ ha dimensione 1; si indichi con $\mathbf{n}$ un generatore di $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >^{\perp}$. Si osservi che, ad esempio, è possibile prendere $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$. Detti α il piano per $\mathbb{S}$ e parallelo a $\mathbf{n}$ e α' il piano per $\mathbb{S}'$ e parallelo a $\mathbf{n}$, la retta $\mathbb{S}''$ cercata è l'intersezione tra α e α'. Si osservi che si può scegliere, come particolare generatore $\mathbf{n}$ il prodotto vettoriale di $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$.

Problema 4.8. *In* $\mathbb{E}$, *siano* r *la retta di equazioni* $x - 3y + z = 0, 2x - 3z = -4$ *e* s *la retta di equazioni* $x - y + z = 0, x + 2y - z = 0$, *nel fissato riferimento. Mostra che le rette sono sghembe e determina equazioni cartesiane per la retta* l *ortogonale e incidente entrambe.*

Soluzione. La retta r ha come vettore direttore $\mathbf{v}(9, 5, 6)$, mentre la retta s ha come vettore direttore $\mathbf{v}'(-1, 2, 3)$: poichè tali vettori non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Considero il vettore $\mathbf{n} = \mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, che ha componenti $(3, -33, 23)$. Osservo che la retta s passa per l'origine, mentre la retta r passa per il punto $(0, 4/9, 12/9)$ (ottenuto intersecando la retta con il piano $x = 0$). Poichè $(\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}') \times \mathbf{OP} = -144/9 \neq 0$, le due rette non possono essere complanari, e dunque sono sghembe.

I piani nel fascio di piani per r hanno equazione della forma

$$\lambda(x - 3y + z) + \mu(2x - 3z + 4) = 0 = (\lambda + 2\mu)\, x - 3\lambda\, y + (\lambda - 3\mu)\, z + 4\mu = 0.$$

Un tale piano è parallelo a $\mathbf{n}$ se e solo se le componenti di $\mathbf{n}$ soddisfano l'equazione della giacitura del piano, cioè se e solo se

$$0 = \lambda(3 - 3(-33) + 23) + \mu(2 \cdot 3 - 3(23)) = 125\lambda - 63\mu.$$

Ciò accade, in particolare, se $(\lambda, \mu) = (63, 125)$ (e ogni altra soluzione è proporzionale a questa), cioè per il piano $313\,x - 189\,y - 312\,z + 500 = 0$ che fornisce una prima equazione per la retta cercata l. Una seconda equazione per l si trova in modo analogo, cercando, nel fascio di piani per s il piano parallelo a $\mathbf{n}$, che risulta avere equazione $145\,x + 32\,y + 27\,z = 0$. La retta cercata l ha dunque equazioni cartesiane $313\,x - 189\,y - 312\,z + 500 = 0, 145\,x + 32\,y + 27\,z = 0$.

Problema 4.9. Distanza punto-retta *In $\mathbb{E}$, siano assegnati un punto $B(b_1, b_2, b_3)$ e la retta r passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e di vettore direttore $\mathbf{v}(l, m, n)$. Calcola la distanza tra B e r.*

Soluzione. Il punto B appartiene alla retta r se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, il punto B ha distanza nulla dalla retta. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Ma la distanza cercata è esattamente l'altezza di questo parallelogramma, e dunque

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

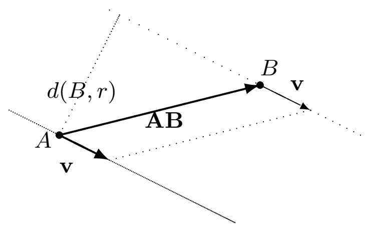

Figura 4.8. Distanza punto-retta

Problema 4.10. *Calcola la distanza tra il punto $B(1, -3, 7)$ e la retta r di equazioni parametriche : $x = 2 - t, y = 4 + 3t, z = 2 - t$, con $t \in \mathbb{R}$.*

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(2, 4, 2)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(-1, 3, -1)$. Il vettore $\mathbf{AB}(-1, -7, 5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}$ e dunque B non appartiene a r e la distanza tra B e r è strettamente positiva. Il vettore $(\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v})$ ha componenti $(-8, -6, -10)$ e lunghezza $\sqrt{200} = 10\sqrt{2}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{11}$. La distanza tra il punto B e la retta r è dunque $d(B, r) = \frac{10\sqrt{2}}{\sqrt{11}}$.

Problema 4.11. Distanza tra due rette parallele *In $\mathbb{E}$, siano assegnate la retta r passante per $A(a_1, a_2, a_3)$ e la retta s, parallela ad r e passante per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$; sia $\mathbf{v}(l, m, n)$ un vettore direttore delle due rette. Calcola la distanza tra r e s.*

Soluzione. La retta r coincide con la retta s se e solo se il vettore $\mathbf{AB}$ è proporzionale a $\mathbf{v}$, cioè se e solo se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se ciò accade, le due rette hanno distanza nulla tra loro. Altrimenti, se $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, la lunghezza di tale vettore fornisce l'area del parallelogramma di lati $\mathbf{AB}$ e $\mathbf{v}$. Poichè la distanza cercata è esattamente l'altezza di tale parallelogramma, otteniamo che

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}|}{|\mathbf{v}|}$$

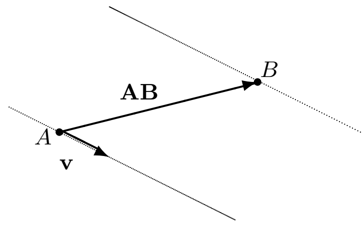

Figura 4.9. Distanza tra rette parallele

Problema 4.12. *Calcola la distanza tra le rette r e s di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -1 + t \\ z = 5 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 5 + 3h \\ y = 2 + h \\ z = -h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(2, -1, 5)$ mentre la retta s passa per il punto $B(5, 2, 0)$, e le due rette sono parallele perchè hanno lo stesso vettore direttore $\mathbf{v}(3, 1, -1)$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(3, 3, -5)$ non è proporzionale al vettore direttore $\mathbf{v}(3, 1, -1)$ e dunque le due rette sono distinte e hanno distanza non nulla tra loro. Il vettore $\mathbf{AB} \wedge \mathbf{v}(2, -12, -6)$ ha lunghezza $\sqrt{184}$, mentre $\mathbf{v}$ ha lunghezza $\sqrt{43}$. La distanza tra le due rette è dunque $d(r, s) = \frac{\sqrt{184}}{\sqrt{43}}$.

Problema 4.13. Distanza tra due rette sghembe *Siano r e s due rette sghembe di $\mathbb{E}$ di dimensione 3. Supponiamo che r abbia vettore direttore $\mathbf{v}(l, m, n)$ e passi per il punto $A(a_1, a_2, a_3)$, mentre s abbia vettore direttore $\mathbf{v}'(l', m', n')$ e passi per il punto $B(b_1, b_2, b_3)$.*
a) Mostra che la distanza tra r e s coincide con

$$d(r, s) = \frac{|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|}$$

b) Mostra che esiste un solo piano α contenente s e parallelo a r. La distanza tra r e s coincide con la distanza di un qualsiasi punto P di r da α.

Soluzione. a) Poichè le rette sono sghembe, lo scalare $\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')$ è non nullo, e il suo valore assoluto coincide con il volume del parallelepipedo di spigoli $\mathbf{v}$, $\mathbf{v}'$ e $\mathbf{AB}$. La distanza tra le due rette r e s è esattamente l'altezza di tale parallelepipedo rispetto alla base di spigoli $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$: la distanza può quindi essere ricavata dividendo il volume $|\mathbf{AB} \times (\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}')|$ del parallelepipedo per l'area di base. Ricordando che l'area di base coincide con la lunghezza del prodotto esterno $\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'$, si ricava la formula cercata:

$$d(r,s) = \left| \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1 & a_2 - b_2 & a_3 - b_3 \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{|\mathbf{v} \wedge \mathbf{v}'|} \right|. \tag{4.69}$$

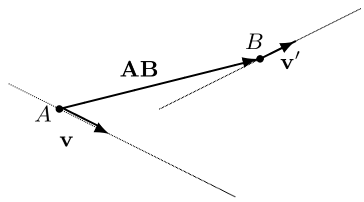

Figura 4.10. Distanza tra rette sghembe

La formula della distanza può essere scritta anche nel modo seguente

$$d(r,s) = \frac{\begin{vmatrix} a_1 - b_1' & a_2 - b_2' & a_3 - b_3' \\ l & m & n \\ l' & m' & n' \end{vmatrix}}{\sqrt{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^t|}} \tag{4.70}$$

dove $\mathbf{A}$ è la matrice

$$\begin{pmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \end{pmatrix} \tag{4.71}$$

Si osservi che, in questo modo, viene calcolata la distanza tra le due rette, senza ricavare in modo esplicito la coppia di punti che minimizza la distanza. Per ottenere tale coppia di punti, è possibile seguire il procedimento dell'Esercizio svolto 4.7 individuando la retta incidente r e s e ortogonale ad entrambe: i punti di incidenza di tale retta con r e s, rispettivamente, sono la coppia di punti di minima distanza.
b) Poichè r e s hanno vettori direttori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ tra loro linearmente indipendenti, ogni piano parallelo sia a r che a s ha giacitura $< \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$: tali piani costituiscono una famiglia di piani paralleli, e in particolare è unico il piano per s parallelo a r: è il piano $B+ < \mathbf{v}, \mathbf{v}' >$, che chiamiamo α. Poichè $s \subset \alpha$, la distanza di r da s è maggiore o uguale alla distanza tra r e α: $d(r,s) \leq d(r,\alpha)$. D'altra parte, poichè r è parallela ad α, tutti i punti di r hanno la stessa distanza da α; dunque $d(r,\alpha) = d(A,\alpha)$. Ma $d(A,\alpha)$ è la distanza tra A e la sua proiezione ortogonale A_α, cioè l'intersezione tra α e la retta per A ortogonale a α: ma tale intersezione è contenuta in s (come si vede dall'Esercizio svolto 4.7.

Problema 4.14. *Calcola la distanza tra le rette r e s di equazioni parametriche (rispettivamente):*

$$r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 + t \\ z = 4 - t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}; \qquad s : \begin{cases} x = 1 + h \\ y = 3h \\ z = -2h \end{cases} \quad h \in \mathbb{R}$$

Soluzione. La retta r passa per il punto $A(3,1,4)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}(2,1,-1)$, mentre la retta s passa per il punto $B(1,0,0)$ e ha vettore direttore $\mathbf{v}'(1,3,-2)$. Il prodotto esterno $\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}'$ ha componenti $(1,3,5)$ e lunghezza $|\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}'| = \sqrt{35}$. Osserviamo che il vettore $\mathbf{AB}(-2,-1,-4)$ non è complanare con $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$, perchè $\mathbf{AB}\times(\mathbf{v}\wedge\mathbf{v}') = -21 \neq 0$, e dunque le due rette sono effettivamente sghembe. In base all'Esercizio svolto 4.13, la distanza tra le due rette è dunque $d(r,s) = \frac{21}{\sqrt{35}}$.

Osservazione 4.6. Siano $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ due rette sghembe di uno spazio euclideo $\mathbb{E}$ di dimensione 3. Esiste un solo piano α contenente $\mathbb{S}$ e parallelo a $\mathbb{S}'$. La distanza tra $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto P' di $\mathbb{S}'$ da α.

Problema 4.15. Piani paralleli per due rette sghembe *Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3 = \mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard, siano $\mathbb{S}$ la retta di equazioni $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{3} = \frac{z}{4}$ ed $\mathbb{S}'$ la retta di equazioni $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.*
a) Determina equazioni cartesiane della retta $\mathbb{S}''$ che interseca ortogonalmente sia $\mathbb{S}$ che $\mathbb{S}'$.
b) Determina la distanza tra $\mathbb{S}$ che $\mathbb{S}'$.

Soluzione. a)Un vettore parallelo ad $\mathbb{S}$ è $\mathbf{v} = (2,3,4)$, mentre un vettore parallelo ad $\mathbb{S}'$ è $\mathbf{v}' = (1,2,3)$. Quindi un vettore $\mathbf{w}$ ortogonale a $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ è il loro prodotto vettoriale $\mathbf{w} = (1,-2,1)$. I fasci di piani per $\mathbb{S}$ e $\mathbb{S}'$ hanno equazione, rispettivamente

$$2\lambda x + 4\mu y - (\lambda+3\mu)z - 2\lambda - 8\mu = 0$$
$$(2\lambda+3\mu)x - \lambda y - \mu z = 0.$$

Un piano del primo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda + 4\mu(-2) - (\lambda+3\mu) = 0$, ossia per (λ,μ) proporzionale a $(11,1)$. Un piano del secondo fascio è parallelo a $\mathbf{w}$ se e solo se $2\lambda+3\mu) - \lambda(-2) - \mu = 0$, ossia per (λ,μ) proporzionale a $(1,-2)$. I piani π e π' sono dunque:

$$\pi : 22x + 4y - 14z - 30 = 0, \qquad \pi' : 4x + y - 2z = 0$$

Si ha quindi $\mathbb{S}'' = \begin{cases} 22x + 4y - 14z - 30 = 0 \\ 4x + y - 2z = 0 \end{cases}$.

b) La distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ è la distanza tra i punti $P = \mathbb{S}\cap\mathbb{S}''$ e $Q = \mathbb{S}'\cap\mathbb{S}''$.

Volendo determinare la distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ si può anche procedere come segue. Il piano α nel fascio per $\mathbb{S}$ parallelo a $\mathbb{S}'$ si ricava per $2\lambda + 8\mu - (\lambda+3\mu)3 = 0$:

$$\alpha : 2x - 4y + 2z + 6 = 0.$$

La distanza tra $\mathbb{S}$ ed $\mathbb{S}'$ coincide con la distanza di un qualsiasi punto P' di $\mathbb{S}'$ da α; ad esempio, per $P'(0,0,0)$, si ricava che $d(\mathbb{S},\mathbb{S}') = \frac{6}{\sqrt{4+16+4}}$.

Esercizi

PIANO EUCLIDEO
Considera il piano affine numerico $\mathbb{E}^2 = \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard.

4.1. Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(3,1)$ e $\mathbf{y}(-1,2)$. Calcola $|\mathbf{Ox}|$, $|\mathbf{Oy}|$, $|\mathbf{Ox}+\mathbf{Oy}|$ e $|\mathbf{Ox}-\mathbf{Oy}|$.

4.2. Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(1,4)$ e $\mathbf{y}(4,1)$.
(i) Calcola il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{Oy}$.
(ii) Calcola il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $-\mathbf{Oy}$.
(iii) Calcola il coseno dell'angolo α fra i vettori $\mathbf{Ox}$ e $-2\mathbf{Oy}$.
(iv) Determina un vettore $\mathbf{v} \in \mathbf{V}(\mathbb{E}^2)$ tale che l'angolo fra $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{v}$ sia $\pi/3$.

4.3. Siano assegnati i punti $\mathbf{x}(1,-1)$ e $\mathbf{y}(4,3)$.
Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
Calcola l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}+\mathbf{y}$.
Calcola l'area del parallelogramma di vertici $\mathbf{0}$, $\mathbf{x}$, $-\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}-\mathbf{y}$.

4.4. Siano $\mathbf{x}(3,1)$, $\mathbf{y}(5,6)$ e $\mathbf{z}(2,2)$. Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$.

4.5. Siano $\mathbf{x}(x_1,x_2)$, $\mathbf{y}(y_1,y_2) \in \mathbb{E}^2$ e sia $\mathbf{p}(\frac{x_1+y_1}{2}, \frac{x_2+y_2}{2})$. Calcola la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{x}$, la distanza da $\mathbf{p}$ a $\mathbf{y}$ e la distanza da $\mathbf{x}$ a $\mathbf{y}$. Deduci che $\mathbf{p}$ è il punto medio tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

4.6. Sia l la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 1+3t \\ x_2 = 2+4t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Determina le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a l. Determina inoltre la distanza di $\mathbf{q}$ da l.

4.7. Considera la retta l di equazione cartesiana $2x - 3y = 4$ e il punto $\mathbf{q}(1,-3)$.
i) Determina le equazioni parametrica e cartesiana della retta per $\mathbf{q}$ e ortogonale a l.
ii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ da l.

4.8. Considera la retta l di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 3+t \\ x_2 = -1-2t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, e il punto $\mathbf{q}(0,3)$.
i) Calcola la proiezione ortogonale del punto $\mathbf{q}$ sulla retta l.
ii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ da l.
iii) Determina la distanza di $\mathbf{q}$ dalla retta di equazione $3x - y = -4$.

4.9. (i) Determina le equazioni della rotazione $R_{\pi/3} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di un angolo $\alpha = \pi/3$ rispetto all'origine. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\pi/3}$, della retta di equazione cartesiana $x - 5y = 1$.
(ii)Determina le equazioni della rotazione $R_{\mathbf{q},\beta} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ di un angolo β rispetto al punto $\mathbf{q}(2,3)$. Determina inoltre l'immagine, rispetto a $R_{\mathbf{q},\beta}$, della retta l di equazione cartesiana $x - 5y = 1$ e della retta per $\mathbf{q}$ ortogonale ad l.

4.10. Sia l la retta di equazione $x + y = 0$.
i) Calcola le equazioni della riflessione R che ha l come luogo di punti fissi.
ii) Calcola le immagini tramite R dei punti $(0, 1)$, $(0, 0)$, $(-1, 3)$.
iii) Calcola le immagini tramite R della retta di equazione parametrica $x_1 = 5, x_2 = -t$.

4.11. Calcola le immagini dei punti $(1, 1)$, $(1, 3)$, $(3, 1)$ tramite la riflessione rispetto all'asse delle ascisse. Analoga domanda utilizzando la riflessione di asse la retta di equazione $x = y$, oppure la retta di equazione $2x + 3y = 0$, oppure la retta di equazione $3x + y = 1$.

SPAZIO EUCLIDEO DI DIMENSIONE 3
Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{E}^3 = \mathbb{E}^3_{\mathbb{R}}$ con riferimento standard.

4.12. Siano $\mathbf{x}(3, 1, 2)$, $\mathbf{y}(-1, 2, 1)$, $\mathbf{z}(2, -1, 1)$.
i) Calcola la distanza tra $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
ii) Calcola l'area del triangolo di vertici $\mathbf{O}$, $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.
iii) Calcola il volume del parallelepipedo che ha come spigoli $\mathbf{Ox}$, $\mathbf{Oy}$ e $\mathbf{Oz}$.
iv) Calcola il coseno dell'angolo tra $\mathbf{Ox}$ e $\mathbf{Oy}$.

4.13. Siano $P(1, 0, -1)$, $Q(1, 0, 0)$, l la retta di equazioni $\begin{cases} x + y = 3 \\ x + 2z = 1 \end{cases}$, π il piano di equazione $2x + 3y + z = 1$.
i) Determinare la distanza tra P ed l e la distanza tra P e π.
ii) Determinare la retta per P e ortogonale a π.
iii) Determinare il piano per P e ortogonale a l.
iv) Le proiezioni ortogonali di Q su l e su π.

4.14. Siano r_1 la retta di equazioni $x - 1 = \frac{y-2}{2} = -z$ ed r_2 la retta di equazioni $x - 2y = x + z = 0$. Determinare la retta s che interseca ortogonalmente sia r_1 che r_2. Determinare inoltre la distanza tra r_1 ed r_2.

4.15. Sia $\mathbf{v}(-1, -1, -1)$.
i) Determina le equazioni della rotazione $\varphi : \mathbb{E}^3 \to \mathbb{E}^3$ di angolo $\pi/2$ intorno a $\mathbf{v}$.
ii) Siano l la retta di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 1 + 2t \\ x_2 = -1 + t \\ x_3 = t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$, r la retta di equazioni cartesiane $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 2 \end{cases}$, π il piano di equazione cartesiana $2x_2 + x_3 = 1$. Determinare le immagini di l, r e π tramite φ.

4.16. Determinare le equazioni della rotazione di angolo $\pi/2$ attorno alla retta l di equazione parametrica $\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = 1 + t \\ x_3 = t \end{cases}$ orientata da $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.