Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

IV Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME e NOME
- Svolgere i quesiti proposti.
- Consegnare al docente gli svolgimenti Lunedi' 11/01/2021
- La valutazione dello svolgimento degli esercizi verra' utilizzata per la valutazione finale, in sede di esame finale del corso
- Consegnare i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali indicare PRECISAMENTE i quesiti che si svolgono.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^2$, dotato del riferimento canonico $e := \{\underline{e}_1, \underline{e}_2\}$, siano dati i sistemi di vettori

$$b := \{\underline{b}_1 = 2\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2,\ \underline{b}_2 = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2\}$$

e

$$c := \{\underline{c}_1 = \underline{e}_1 + \underline{e}_2,\ \underline{c}_2 = 5\underline{e}_1 + 6\underline{e}_2\}\,.$$

Sia dato infine il vettore $\underline{u} = 5\underline{b}_1 - 4\underline{b}_2$.
(i) Verificare che i sistemi b e c sono due basi per $\mathbb{R}^2$.
(ii) Determinare la matrice cambiamento di base $M_{c,b}$.
(iii) Determinare la matrice cambiamento di base $M_{b,c}$.
(iii) Determinare le coordinate del vettore $\underline{u}$ in base e ed in base c.

Esercizio 2. Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x_1, x_2, x_3, x_4)$.
(i) Determinare equazioni parametriche ed equazione cartesiana dell'iperpiano α, contenente il piano:

$$\pi : \begin{cases} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 3 \end{cases},$$

e parallelo alla retta:

$$\ell : \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(ii) Scrivere le equazioni cartesiane di un piano che sia sghembo alla retta

$$r : \begin{cases} x_1 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 + x_4 &= 3 \\ x_4 &= 5 \end{cases}.$$

(iii) Determinare il luogo dei punti fissi dell'affinita'

$$\underline{x} \xrightarrow{f} A\underline{x} + \underline{b},$$

dove

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi, a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al piu' 2. Sia data l'applicazione $f : V \to V$ definita come

$$f(a_0 + a_1\, x + a_2\, x^2) = (a_0 - a_1 - 2a_2) + (a_1 + a_2)x + 2a_2\, x^2.$$

(i) Verificare che l'applicazione f é un'applicazione lineare

(ii) Determinare la matrice rappresentativa di f nella base canonica $e := \{1, x, x^2\}$ di V, i.e. determinare $M_e(f)$.

(iii) Determinare la dimensione del nucleo di f; determinare una base per $Ker(f)$ ed equazioni parametriche e cartesiane di $Ker(f)$ nelle coordinate (a_0, a_1, a_2) individuate dal riferimento canonico $e := \{1, x, x^2\}$ di V.

(iv) Determinare la dimensione dell'immagine di f; determinare una base per $Im(f)$ ed equazioni parametriche e cartesiane di $Im(f)$ nelle coordinate (a_0, a_1, a_2) individuate dal riferimento canonico $e := \{1, x, x^2\}$ di V.

Esercizio 4. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$, munito di riferimento canonico e, si considerino il vettore $\underline{v} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ e l'endomorfismo $f \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$f(\underline{e}_1) = f(\underline{e}_2 - \underline{e}_1) = f(\underline{e}_3) = \underline{v}.$$

(i) Stabilire se f e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$.
(ii) Determinare dimensione, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di $Ker(f)$ e di $Im(f)$ nelle coordinate (x_1, x_2, x_3) individuate dal riferimento canonico e.
(iii) Dato il vettore $\underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ espresso in componenti rispetto al riferimento canonico e, stabilire se $\underline{b} \in Im(f)$. In caso di risposta affermativa, determinare l'insieme delle controimmagini di $\underline{b}$ mediante f.
(iii) Dato il vettore $\underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ espresso in componenti rispetto al riferimento canonico e, stabilire se $\underline{c} \in Im(f)$. In caso di risposta affermativa, determinare l'insieme delle controimmagini di $\underline{c}$ mediante f.