Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

III Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME E MATRICOLA
- Svolgere i quesiti proposti.
- Consegnare al docente gli svolgimenti la settimana successiva (stesso giorno di consegna della settimana precedente)
- La valutazione dello svolgimento degli esercizi verra' utilizzata per la valutazione finale, in sede di esame finale del corso
- Consegnare i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali, ricopiare anche i testi.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME: ....

Esercizio 1. Nell' $\mathbb{R}$–spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

le cui componenti sono espresse rispetto alla base e. Sia dato inoltre il sottospazio

$$W := \langle \underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3, \underline{v}_4 \rangle$$

(i) Estrarre dal sistema di generatori di W una base b di W. Dedurre $\dim(W)$ e $\mathrm{codim}(W)$.

(ii) Determinare equazioni parametriche vettoriali, equazioni parametriche scalari ed equazioni cartesiane di W.

(iii) Estendere la base b di W determinata al punto (i) ad una base c per lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$.

(iv) Denotato con R_V il riferimento vettoriale di $\mathbb{R}^4$ individuato dalla base c, scrivere le componenti nel riferimento R_V del vettore $\underline{w} = \underline{e}_1 - \underline{e}_4$.

Esercizio 2. Nello spazio affine numerico $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano affine $RC(O; x_1, x_2, x_3)$, siano date le due coppie di punti

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ e } B_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \; B_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(i) Denotando con r_A la retta affine passante per i due punti A_1, A_2 e con r_B la retta affine per i due punti B_1, B_2, determinare equazioni parametriche vettoriali, equazioni parametriche scalari ed equazioni cartesiane delle rette affini r_A e r_B.
(ii) Determinare equazioni parametriche vettoriali, equazioni parametriche scalari ed equazioni cartesiane delle giaciture di r_A e r_B rispettivamente.
(iii) Data la trasformazione di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ in se' stesso individuata da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix},$$

verificare che la trasformazione f trasforma la retta affine r_A nella retta affine r_B.
(iv) Determinare se possibile dimensione, equazioni parametriche vettoriali, equazioni parametriche scalari ed equazioni cartesiane del sottospazio affine π passante per i punti A_1, A_2 e B_1 stabilendo se π e' un iperpiano di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$.

Esercizio 3. Sia V uno $\mathbb{K}$–spazio vettoriale reale di dimensione 4, ove $\mathbb{K}$ un campo. Sia $b = \underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3, \underline{b}_4$ una base di V. Poniamo inoltre

$$\underline{u}_1 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 + \underline{b}_3, \ \underline{u}_2 = \underline{b}_1 + \underline{b}_2 - \underline{b}_3$$

e

$$\underline{w}_1 = \underline{b}_2, \ \underline{w}_2 = \underline{b}_2 + \underline{b}_3, \ \underline{w}_3 = \underline{b}_2 + 3\underline{b}_4.$$

Consideriamo i due sottospazi

$$U := \langle \underline{u}_1, \ \underline{u}_2 \rangle \ \text{ e } \ W := \langle \underline{w}_1, \ \underline{w}_2, \ \underline{w}_3 \rangle.$$

(i) Trovare le dimensioni di U e di W.
(ii) Verificare che $V = U + W$.
(iii) Dimostrare che la somma al punto (iii) non e' somma diretta.
(iv) Determinare una base di $U \cap W$.

Esercizio 4. Sia $V = M(2,2;\mathbb{R})$ l'$\mathbb{R}$–spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \ \mid \ 3a + b + c = 0 \right\}.$$

(i) Verificare che W e' un sottospazio di V.

(ii) Determinare una base di W.

(iii) Denotato con $U := M(2,2;\mathbb{R})^s$ il sottospazio di V delle matrici simmetriche, individuare $\dim(U + W)$ e $\dim(U \cap W)$.

(iv) Esibire una base per $U + W$ ed una base per $U \cap W$.

Esercizio 5. Si consideri lo spazio affine numerico $\mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$, con riferimento cartesiano affine $RC(O; x_1, x_2, x_3, x_4)$.
(i) Stabilire per quali valori del parametro $k \in \mathbb{R}$ il sistema lineare $SL(3, 4; \mathbb{R})$, avente per matrice completa la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & k & -k & 0 & -k \\ k & 1 & 0 & -k & 0 \\ 1 & k & -1 & k & 0 \end{pmatrix}$$

risulti compatibile. (**Suggerimento**: distinguere i casi $k = 0$ e $k \neq 0$).
(ii) Nei casi in cui k fornisce compatibilita' per il sistema, determinarne le soluzioni.
(iii) Si consideri ora il sottospazio affine $S \subset \mathbb{A}^4_{\mathbb{R}}$ individuato dal seguente $SL(3, 4; \mathbb{R})$

$$\mathcal{A}_S : \begin{cases} X_3 + 2X_4 & = & 3 \\ 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 & = & 4 \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 + 2X_4 & = & 7 \end{cases}$$

Determinare dimensione e codimensione del sottospazio affine S.
(iv) Scrivere equazioni parametriche vettoriali ed equazioni parametriche scalari del sottospazio affine S (equivalentemente scrivere $M(\mathcal{A}_S) = P + M(\mathcal{A}_S^{omog})$ – con notazioni come nel testo [AL] – oppure $Sol(\mathcal{A}_S) = P + Sol(\mathcal{A}_S^{omog})$ – con notazione come nelle dispense – secondo il Teorema di Struttura dei sistemi non omogenei compatibili).