Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

II Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME E MATRICOLA
- Svolgere i quesiti proposti.
- Consegnare al docente gli svolgimenti la settimana successiva (stesso giorno di consegna della settimana precedente)
- La valutazione dello svolgimento degli esercizi verra' utilizzata per la valutazione finale, in sede di esame finale del corso
- Consegnare i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali, ricopiare anche i testi.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME MATRICOLA: ....

Esercizio 1. Sia $V := \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$, nell'indeterminata x e di grado al piu' 3. Sia dato il sistema di vettori di ordine 7:

$$S := \{1-x,\ 1+x,\ 1-x^2,\ 1+x^2, x-x^2,\ x+x^2,\ 1+x^2+x^3\}.$$

(i) Stabilire se S e' un sistema di vettori linearmente indipendenti.
(ii) In caso di risposta negativa, estrarre un sottosistema $S' \subset S$ di vettori linearmente indipendenti, che sia anche un sistema di generatori per V.
(iii) Determinare l'espressione del vettore (polinomio)

$$p(x) = 10 - 7x - x^2 + x^3 \in V$$

come combinazione lineare dei vettori selezionati nel sottosistema S'
(iv) Detto

$$W := \{q(x) \in V \mid q(2) = 0\} \subseteq V,$$

stabilire che W e' un sottospazio di V.
(v) Determinare un sistema di generatori per W.

Esercizio 2. Sia $V = M(3 \times 3; \mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 3. Si consideri il sottoinsieme

$$W := \{A \in V \mid A - \ A^t = O\},$$

dove A^t e' la trasposta di A ed O e' la matrice quadrata nulla.
(i) Verificare che W e' un sottospazio di V.
(ii) Determinare un sistema S di generatori e contemporaneamente di vettori linearmente indipendenti per W.
(iii) Dato il vettore

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 5 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

verificare che $A \in W$.
(iv) Scrivere A come combinazione lineare rispetto al sistema di vettori trovato in (ii).

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ siano assegnati i seguenti vettori (per comodita' scritti per riga):

$$\underline{v}_1 = (0, 1, -1),\ \underline{v}_2 = (1, 0, 1),\ \underline{v}_3 = (1, -1, 3).$$

Si consideri inoltre il vettore $\underline{w} = (1, 0, 2)$.
(i) Scrivere le componenti del vettore arbitrario appartenente a $W := \langle \underline{w} \rangle \subset \mathbb{R}^3$.
(ii) Verificare che

$$S := \{\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{v}_3\}$$

e' un sistema di vettori di ordine 3 formato da generatori per $\mathbb{R}^3$ che sono anche tre vettori linearmente indipendenti.
(iii) Scrivere il vettore $\underline{w}$ come combinazione lineare dei vettori del sistema S.
(iv) Determinare le componenti del vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ sapendo che

$$\underline{u} = \underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3.$$

Esercizio 4. Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 2}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti nel campo reale $\mathbb{R}$, in un'indeterminata x e di grado al piu' 2. Si considerino i sottoinsiemi

$$U := \langle x,\ x^2 \rangle \ \text{ e } \ W := \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in V \mid a_0 = 0 = a_1 - a_2\}.$$

(i) Verificare che U e W sono entrambi sottospazi.
(ii) Determinare un sistema di generatori S per U che sia costituito da vettori linearmente indipendenti.
(ii) Determinare un sistema di generatori S' per W che sia costituito da vettori linearmente indipendenti.
(iii) Determinare un sistema di generatori S'' per il sottospazio $U \cap W$ che sia costituito da vettori linearmente indipendenti.

Esercizio 5. Sia $V = M(2,2;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad entrate reali. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid 3a + b + c = 0 \right\}.$$

(i) Verificare che W e' un sottospazio di V.

(ii) Determinare un sistema di generatori S per W che sia costituito da vettori linearmente indipendenti.

(iii) Detto $U = Sym(2,2;\mathbb{R})$ il sottospazio di V delle matrici simmetriche, determinare un sistema di generatori S' per $U \cap W$ che sia costituito da vettori linearmente indipendenti.