Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
Laurea Triennale in Matematica - a.a. 2020/2021
Corso: Geometria 1 con Elementi di Storia 1
Docente: Prof. F. Flamini, Codocente: Prof.ssa F. Tovena

I Foglio Esercizi Proposti (Homeworks)

- Scrivere negli appositi spazi COGNOME NOME E MATRICOLA
- Svolgere i quesiti proposti.
- Consegnare al docente gli svolgimenti la settimana successiva (stesso giorno di consegna della settimana precedente)
- La valutazione dello svolgimento degli esercizi verra' utilizzata per la valutazione finale, in sede di esame finale del corso
- Consegnare i seguenti fogli stampati e spillati, oppure, se su fogli personali, ricopiare anche i testi.
- Scrivere in formato leggibile, giustificando concisamente ma chiaramente tutti i passaggi che si svolgono.

COGNOME NOME MATRICOLA: ....

Esercizio 1. Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi e sia $\mathbf{z} := 2 + 3i \in \mathbb{C}$.

(i) Determinare $\mathbf{z}^{-1}$, i.e. l'inverso moltiplicativo di $\mathbf{z}$ in $\mathbb{C}$.

(ii) Rappresentare nel piano di Argand-Gauss i numeri complessi $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}^{-1}$.

(iii) Determinare il numero complesso $\mathbf{z}^3$, scrivendolo nella forma $\mathbf{z}^3 = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare

(iv) Determinare il numero complesso $\mathbf{z}^{-3}$, scrivendolo nella forma $\mathbf{z}^{-3} = a + ib$ con $a, b \in \mathbb{R}$ da determinare.

Esercizio 2. Sia date la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{2} & -3 \\ 5 & \frac{1}{3} & \frac{-2}{5} & 0 \\ -10 & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & 9 \end{pmatrix} \in M(3,4;\mathbb{Q})$$

(i) Determinare l'opposta di A

(ii) Determinare la matrice A^t, trasposta di A

(iii) Stabilire se ha senso considerare la combinazione lineare di A e di A^t, a coefficienti $\frac{1}{2}$ e 4 rispettivamente.

(iv) Data infine la matrice quadrata $B = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \in M(2,2;\mathbb{Q})$, stabilire se puo' esistere una matrice $C \in M(2,2;\mathbb{Q})$ per cui, la combinazione lineare $3B + 2C$ delle matrici B e C con coefficienti 3 e 2 rispettivamente, possa dare la matrice nulla, i.e. $3B + 2C = O$.

Esercizio 3. Nell' $\mathbb{R}$–spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^3$ stabilire quali dei sottoinsiemi sottoelencati hanno una struttura di $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale:

(i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 0 \right\}$

(ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y - z = 7 \right\}$

(iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid xy = 0 \right\}$

(iv) $U_4 := \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid z - x^2 = 0 \right\}$

Esercizio 4. Si consideri l'$\mathbb{R}$–spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$ dei polinomi, a coefficienti nel campo $\mathbb{R}$ e nell'indeterminata x. Si consideri il sottoinsieme

$$W := \{p(x) \in \mathbb{R}[x] \,|\, p(2) = 0\} \subseteq \mathbb{R}[x].$$

(i) Stabilire se W e' un $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

(ii) In caso di risposta affermativa, W e' un $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale proprio di $\mathbb{R}[x]$?

(iii) Preso $\mathbb{R}[x]_{\leq 4}$, che e' l'$\mathbb{R}$–sottospazio di $\mathbb{R}[x]$ formato dai polinomi di grado al piu' 4, verificare che $W \cap \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e' anch'esso un $\mathbb{R}$–sottospazio di $\mathbb{R}[x]$, determinando l'espressione del generico polinomio che appartiene a $W \cap \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$.

(iv) Stabilire se $W \cup \mathbb{R}[x]_{\leq 4}$ e' anch'esso un $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}[x]$.

Esercizio 5. Si consideri l'$\mathbb{R}$–spazio vettoriale numerico $\mathbb{R}^4$ e si consideri il sistema lineare non–omogeneo

$$\mathfrak{A} : \quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 & = & 1 \\ x_3 + x_4 & = & 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 & = & 3 \end{cases}$$

(i) Scrivere la matrice completa, la matrice incompleta (o dei coefficienti) e la colonna dei termini noti del sistema $\mathfrak{A}$.

(ii) Determinare $M(\mathfrak{A}^{om})$, cioe' l'insieme delle soluzioni del sistema lineare omogeneo $\mathfrak{A}^{om}$ associato ad $\mathfrak{A}$.

(iii) Verificare che $M(\mathfrak{A}^{om})$ e' un $\mathbb{R}$–sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ e scrivere il generico vettore appartenente all'$\mathbb{R}$–sottospazio $M(\mathfrak{A}^{om})$.

(iv) Stabilire se $\mathfrak{A}$ e' compatibile ed, in caso di risposta affermativa, descrivere il sottoinsieme $M(\mathfrak{A}) \subset \mathbb{R}^4$ come opportuno **traslato** del sottospazio vettoriale $M(\mathfrak{A}^{om})$, in accordo con il contenuto del Teorema di Struttura dei sistemi lineari compatibili.