Chapter 1

Prodotti scalari e spazi vettoriali euclidei

D'ora in poi considereremo ESCLUSIVAMENTE **spazi vettoriali reali**.

1.1 Prodotti scalari

La nozione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale qualsiasi è la seguente.

Definizione 1.1.1. *Un* **prodotto scalare** *su uno spazio vettoriale V è una funzione*

$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

dotata delle seguenti proprietà:
(1) Proprietà commutativa: $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in V$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle$$

(2) Proprietà distributiva rispetto alla somma: $\forall\ \underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in V$

$$\langle \underline{x}, \underline{y} + \underline{z} \rangle = \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle + \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle \quad \text{e} \quad \langle \underline{y} + \underline{z}, \underline{x} \rangle = \langle \underline{y}, \underline{x} \rangle + \langle \underline{z}, \underline{x} \rangle.$$

(3) Proprietà di bilinearità : $\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in V$ *e* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$

$$\langle \lambda \underline{x}, \underline{y} \rangle = \lambda \langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \lambda \underline{y} \rangle$$

(4) Positivita': deve valere $\langle \underline{x}, \underline{x} \rangle > 0$ *per ogni* $\underline{x} \neq \underline{0}$ *e* $\langle \underline{0}, \underline{0} \rangle = 0$.

Per quanto riguarda la proprietà distributiva si noti che la seconda parte di tale proprietà segue dalla prima parte e dalla proprietà commutativa. Essa poteva quindi essere anche omessa dalla definizione.

Vediamo qualche esempio di prodotto scalare.

Esempio 1.1.1. *Integrale di un prodotto di polinomi*
Sia $\mathbb{R}[x]$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali in una indeterminata x e sia

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}$$

la funzione che alla coppia di polinomi $(P(x), Q(x)) = (P, Q) \in \mathbb{R}[x] \times \mathbb{R}[x]$ associa l'integrale

$$\int_0^1 PQ\ dx.$$

$\langle\ ,\ \rangle$ sopra definito è un esempio di prodotto scalare sullo spazio vettoriale $\mathbb{R}[x]$. Poiché $PQ = QP$ è ovvio che la proprietà commutativa è soddisfatta. D'altra parte si ha

$$\langle P, Q_1 + Q_2\rangle = \int_0^1 P(Q_1 + Q_2)\ dx = \int_0^1 PQ_1\ dx + \int_0^1 PQ_2 dx,$$

poiché l'integrale commuta con la somma di funzioni. Sia poi $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$\int_0^1 \lambda G\ dx = \lambda \int_0^1 G\ dx$$

per ogni funzione G, integrabile tra 0 e 1 e quindi

$$\langle \lambda P, Q\rangle = \lambda\langle P, Q\rangle = \langle P, \lambda Q\rangle.$$

Se infine P è un polinomio *non nullo,* P^2 è non nullo e assume un valore ≥ 0 per ogni numero reale. Inoltre P^2 si annulla soltanto per un numero finito di valori reali che sono le radici di P. Usando tali osservazioni si ha che

$$\langle P, P\rangle = \int_0^1 P^2 dx > 0,$$

$\forall P \in \mathbb{R}[x]$. Si ha dunque $\langle P, P\rangle \geq 0$ e $\langle P, P\rangle = 0$ se, e solo se, P è il polinomio nullo.

Esempio 1.1.2. *Prodotto scalare standard su* $\mathbb{R}^n$.
Su $\mathbb{R}^n$ abbiamo la base canonica e e quindi possiamo definire il seguente prodotto scalare

$$\langle\ ,\ \rangle_e : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}.$$

Siano $\underline{x} = (x_1, \dots . x_n)$ e $\underline{y} = (y_1, \dots, y_n)$; allora $\underline{x} = \sum_{i=1,\dots,n} x_i \underline{e}_i$ e $\underline{y} = \sum_{i=1,\dots,n} y_i \underline{e}_i$, quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle_e = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n.$$

Questo particolare esempio si chiama *prodotto scalare standard* su $\mathbb{R}^n$. Nel seguito il prodotto scalare standard verrà denotato con $\times$.

Esempio 1.1.3. *Prodotto scalare determinato da A^t A.*
Sia A una matrice quadrata di ordine n e di rango n; un ulteriore esempio di prodotto scalare si definisce a partire da A nel modo indicato dal seguente

Teorema 1.1.1. *Sia A una matrice quadrata di ordine e di rango n e sia*

$$F : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

la funzione così definita: qualunque siano $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_q)$ e $\underline{y} = (y_1, \ldots, y_q)$

$$F(\underline{x}, \underline{y}) = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_q \end{pmatrix} A^t\, A \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_q \end{pmatrix}.$$

Allora $F := \langle , \rangle_A$ è un prodotto scalare su $\mathbb{R}^n$.

Dimostrazione. La proprietà distributiva e la bilinearità di F sono di facile verifica con un calcolo diretto, le lasciamo perciò al lettore.
Per verificare la proprietà commutativa si osservi che la matrice prodotto che si trova a destra nell'ultima uguaglianza è uguale alla propria trasposta: semplicemente perché si tratta di una matrice 1×1. D'altra parte la trasposta di tale matrice prodotto è il prodotto in ordine inverso delle matrici trasposte dei fattori e cioè

$$\begin{pmatrix} y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix}\ A^t\, A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Poiché tale espressione è $F(\underline{y}, \underline{x})$ ne segue che $F(\underline{x}, \underline{y}) = F(\underline{y}, \underline{x})$. Infine si deve verificare che $F(\underline{x}, \underline{x}) > 0$, per ogni $\underline{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ non nullo. Sia

$$(x_1, \ldots, x_n)^t A = (y_1, \ldots, y_n),$$

passando da questa uguaglianza all'uguaglianza tra matrici trasposte otteniamo

$$A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Quindi si ha

$$F(\underline{x}, \underline{x}) = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix}\ A^t\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1, \ldots, y_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = y_1^2 + \cdots + y_n^2.$$

Si noti che A ha rango n e che quindi l'unica soluzione del sistema omogeneo determinato da A è la soluzione nulla. Poiché $\underline{x}$ non è nullo $\underline{x}$ non è una soluzione del sistema e quindi almeno un y_i è diverso da zero. Possiamo dedurre da ciò che $F(\underline{x}, \underline{x}) = \sum y_i^2 > 0$. $\square$

Se $A = I_n$ la costruzione riproduce esattamente il prodotto scalare standard su $\mathbb{R}^n$ dell'esempio precedente, i.e. $\langle , \rangle_{I_n} = \times$.

1.2 Prodotti scalari e matrici simmetriche

Sia V uno spazio vettoriale di dimensione n e sia $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ una sua base. Assegnato un prodotto scalare

$$\langle \ , \ \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

su V, possiamo considerare la matrice

$$B_u(\langle \ , \ \rangle)$$

il cui termine di posto i, j è

$$b_{ij} = \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle.$$

Definizione 1.2.1. *$B_u(\langle \ , \ \rangle)$ è la* **matrice del prodotto scalare** $\langle \ , \ \rangle$ **rispetto alla base** u.

È chiaro che $B_u(\langle \ , \ \rangle)$ è una matrice quadrata di ordine n. Si noti inoltre che $B_u(\langle \ , \ \rangle)$ è una matrice simmetrica. L'importanza della matrice $B_u(\langle \ , \ \rangle)$ è dovuta alla seguente proprieta':

Proposizione 1.2.1. *Data $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ una base di V, si ha*

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1 \ldots x_n \end{pmatrix} B_u(\langle \ , \ \rangle) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix},$$

qualunque siano i vettori $\underline{x} = x_1\underline{u}_1 + \cdots + x_n\underline{u}_n$ e $\underline{y} = y_1\underline{u}_1 + \cdots + u_n\underline{u}_n$ di V, espressi in coordinate rispetto alla base u.

Dimostrazione. La dimostrazione consiste di applicazioni successive della proprietà distributiva e di linearità. Indicheremo i passi da compiere tralasciando i dettagli. Innanzitutto si ha

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \langle \underline{x}, \sum_{j=1,\ldots,n} y_j \underline{u}_j \rangle = \sum_{j=1,\ldots,n} y_j \langle \underline{x}, \underline{u}_j \rangle.$$

D'altra parte

$$y_j \langle \underline{x}, \underline{u}_j \rangle = y_j \langle \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = y_j \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle$$

e quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \sum_{j=1,\ldots,n} y_j \sum_{i=1,\ldots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i,j=1,\ldots,n} x_i y_j b_{ij}.$$

Calcolando infine $\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} B_u(\langle \ , \ \rangle)$ si ottiene

$$\begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} B_u(\langle \ , \ \rangle) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 b_{11} + \cdots + x_n b_{n1} \ \ldots \ x_1 b_{1n} + \cdots + x_n b_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Per concludere basta osservare che

$$\big(x_1 b_{11} + \cdots + x_n b_{n1} \ \ldots \ x_1 b_{1n} + \cdots + x_n b_{nn}\big) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i,j=1,\ldots,n} x_i y_j b_{ij}.$$

$\square$

In definitiva, la matrice $B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ permette di calcolare facilmente il prodotto scalare $\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ una volta che siano note le coordinate dei vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto alla base u.

Come cambia la matrice del prodotto scalare quando cambiamo base in V? La risposta a questa domanda naturale é data dal seguente:

Teorema 1.2.2. *Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e siano u e v due sue basi qualsiasi. Sia poi $\langle\ ,\ \rangle$ un prodotto scalare su V e siano $B_u := B_u(\langle\ ,\ \rangle)$ e $B_v := B_v(\langle\ ,\ \rangle)$ rispettivamente le matrici di tale prodotto scalare rispetto alle basi u e v. Allora la relazione tra le matrici B_u e B_v dei prodotti scalari in queste due basi è la seguente:*

$$B_v = M_{uv}^t\ B_u\ M_{uv}, \tag{1.1}$$

dove M_{uv} è la matrice del cambiamento di base da u a v.

Dimostrazione. Siano $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n,\ v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ e siano assegnati due vettori qualsiasi

$$\underline{x} = x_1\underline{v}_1 + \cdots + x_n\underline{v}_n \quad e \quad \underline{y} = y_1\underline{v}_1 + \cdots + y_n\underline{v}_n,$$

espressi mediante le loro coordinate rispetto alla base v. Dalla formula del cambiamento di coordinate, le colonne delle coordinate di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto alla base u sono, rispettivamente,

$$M_{uv}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \ \text{ e } \ M_{uv}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Si osservi inoltre che la trasposta del primo prodotto è

$$\big(x_1, \ldots, x_n\big)\ M_{uv}^t.$$

Poiché B_u è la matrice di $\langle\ ,\ \rangle$ rispetto alla base u, ne segue che in base u si ha:

$$\langle \underline{x}, \underline{y}\rangle = \big(x_1, \ldots, x_n\big)\, M_{uv}^t\, B_u\, M_{uv} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Poiché la precedente eguaglianza vale qualunque siano i vettori $\underline{x}$ e $\underline{y}$, possiamo dedurre che

$$B_v = M_{uv}^t\, B_u\, M_{uv}.$$

Si osservi infatti che le coordinate di $\underline{v}_i$ (rispettivamente, di $\underline{v}_j$) rispetto a v sono nulle salvo quella i-esima (rispettivamente, la j-esima), che vale 1. La penultima eguaglianza implica allora

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \begin{pmatrix} 0 \dots 1_i \dots 0 \end{pmatrix} \; M^t_{uv} \; B_u \; M_{uv} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1_j \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

L'espressione a destra di quest'ultima uguaglianza è esattamente il termine di posto i, j della matrice prodotto

$$M^t_{uv} B_u M_{uv}.$$

D'altra parte B_v è, per definizione di matrice associata ad un prodotto scalare rispetto ad una base, esattamente la matrice il cui termine di posto i, j è $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle$. Per ogni i, j, $M^t_{uv} \; B_u \; M_{uv}$ e B_v hanno dunque lo stesso termine i, j. Quindi sono matrici uguali. □

La relazione (1.1) tra le matrici B_u e B_v del prodotto scalare in due basi diverse è molto importante e rientra in una situazione più generale:

Definizione 1.2.2. *Due matrici A e B, $n \times n$, si dicono* **congruenti** *se esiste una matrice invertibile M, $n \times n$, tale che valga*

$$B = M^t \; A \; M. \tag{1.2}$$

Se A è B soddisfano la relazione (1.2)*, esse si dicono congruenti per mezzo di M.*

Dal Teorema 1.2.2 abbiamo quindi:

Corollario 1.2.3. *Dato uno spazio vettoriale euclideo V, le matrici di un prodotto scalare rispetto a due qualsiasi basi di V sono congruenti.*

1.3 Spazi vettoriali euclidei. Norma, lunghezza, angoli e perpendicolarità

In questo paragrafo lavoreremo su uno spazio vettoriale V sul quale converrà avere fissato una volta per tutte un prodotto scalare
$$\langle\ ,\ \rangle : V \times V \to \mathbb{R},$$
scelto tra gli infiniti prodotti scalari definiti su V. Lavoreremo quindi avendo assegnato la coppia $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ e non solo lo spazio vettoriale V.

Definizione 1.3.1. *Uno* **spazio vettoriale euclideo** *è una coppia* $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ *dove* V *è uno spazio vettoriale e* $\langle\ ,\ \rangle$ *è un prodotto scalare su* V.

Dato $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ uno spazio vettoriale euclideo, vogliamo discutere alcune proprietà geometriche notevoli di tale spazio. Abbiamo bisogno prima di alcuni preliminari.

* **Norma e lunghezza di un vettore**
In uno spazio vettoriale euclideo si può introdurre la nozione di *lunghezza di vettori*.

Definizione 1.3.2. *Sia* V *uno spazio vettoriale euclideo e sia* $\underline{v} \in V$ *un qualsiasi vettore. La* **norma** *di* $\underline{v}$ *è il numero reale non negativo*

$$|| \, \underline{v} \, || := \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle$$

mentre il **modulo** *(o* **lunghezza***) del vettore* $\underline{v}$ *é definita come*

$$| \, \underline{v} \, | := \sqrt{|| \, \underline{v} \, ||} = \sqrt{\langle \underline{v}, \underline{v} \rangle}$$

Notiamo che, se $V = \mathbb{R}^n$ é munito di prodotto scalare standard, date $(y_1, \ldots, y_n)$ le coordinate di $\underline{v}$ rispetto alla base canonica e, allora

$$| \, \underline{v} \, | = \sqrt{y_1^2 + \cdots + y_n^2}.$$

In particolare, se prendiamo ad esempio $V = \mathbb{R}^2$ e $\underline{v} = \underline{e}_1$, allora la lunghezza del primo vettore della base canonica $\underline{e}_1$ rispetto al prodotto scalare standard $\times$ su $\mathbb{R}^2$ é 1; se invece su $V = \mathbb{R}^2$ mettiamo come prodotto scalare quello della forma $\langle , \rangle_A$, dove

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

allora la lunghezza di $\underline{e}_1$ rispetto a questo nuovo prodotto scalare é $\sqrt{2}$, infatti

$$A^t A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$$

quindi

$$\langle \underline{e}_1, \underline{e}_1 \rangle_A = (1,0) A^t A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = (1,0) \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 2.$$

* **Versori. Versorizzazione di un vettore**

Definizione 1.3.3. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $\underline{v} \in V$. Il vettore $\underline{v}$ si dice* **versore***, se*

$$| \underline{v} | := 1.$$

Notare che se invece $\underline{v}$ non e' un versore, si puo' sempre considerare un generatore di $Span(\underline{v})$ che sia un versore, i.e.

$$\underline{f} = \frac{\underline{v}}{| \underline{v} |}$$

e questa formula si denomina **versorizzazione** del vettore $\underline{v}$.

Infatti, grazie alla definizione di norma, modulo ed alla bilinearitá del prodotto scalare, si ha:

$$||\underline{f}|| = \langle \underline{f}, \underline{f} \rangle = \langle \frac{\underline{v}}{| \underline{v} |}, \frac{\underline{v}}{| \underline{v} |} \rangle = \frac{1}{| \underline{v} |} \langle \underline{v}, \frac{\underline{v}}{| \underline{v} |} \rangle = \frac{1}{| \underline{v} |^2} \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \frac{1}{|| \underline{v} ||} || \underline{v} || = 1.$$

* **Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz**

Teorema 1.3.1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo. Qualunque siano i vettori $\underline{u}, \underline{v} \in V$ si ha*

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 \ \leq \ || \underline{u} || \, || \underline{v} || \, .$$

Inoltre vale l' uguaglianza se, e solo se, $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. Al variare di t in $\mathbb{R}$ consideriamo il vettore $t\underline{u} + \underline{v}$ ed osserviamo che

$$\langle t\underline{u} + \underline{v}, t\underline{u} + \underline{v} \rangle \ \geq \ 0$$

in quanto $\langle \ , \ \rangle$ è un prodotto scalare. D'altra parte si calcola facilmente che

$$\langle t\underline{u} + \underline{v}, t\underline{u} + \underline{v} \rangle = at^2 + 2bt + c$$

dove

$$a = \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle, \ b = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle, \ c = \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle.$$

Se $a = 0$ allora $\underline{u} = \underline{0}$ e la disuguaglianza diventa l'uguaglianza $0 = 0$: in tal caso non c'è altro da dimostrare. Consideriamo allora il caso rimanente e cioè $a > 0$: per il polinomio di secondo grado $at^2 + 2bt + c$ sappiamo che vale

$$at^2 + 2bt + c \geq 0$$

qualunque sia t. Equivalentemente il discriminante $4(b^2 - ac)$ di tale polinomio deve essere ≤ 0. Ma allora abbiamo

$$b^2 - ac = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle^2 - \langle \underline{u}, \underline{u} \rangle \ \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle \ \leq \ 0;$$

utilizzando la definizione di norma, ciò prova la prima parte del teorema.

Si noti infine che l'ultima disuguaglianza è un'uguaglianza se, e solo se, $b^2 - ac = 0$ e cioè se, e solo se, l'equazione $at^2 + 2bt + c = 0$ ha un'unica radice $t_0 = -\frac{b}{a}$. Ciò avviene se, e solo se,

$$\langle t_0\underline{u} + \underline{v}, t_0\underline{u} + \underline{v}\rangle = 0$$

ovvero se, e solo se, $t_0\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$. Essendo $\underline{u} \neq \underline{0}$ la condizione $t_0\underline{u} + \underline{v} = \underline{0}$ equivale alla condizione che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ siano linearmente dipendenti. $\square$

* **Coseno di angoli convessi**.
A partire dalla disuguaglianza di Schwarz, possiamo dare una nozione di **angolo convesso** fra due vettori non nulli di uno spazio vettoriale euclideo V, estendendo quanto noto nella geometria euclidea elementare.

Siano $\underline{u}$ e $\underline{v}$ due vettori non nulli di V. È immediato verificare che la diseguaglianza di Schwarz è equivalente a:

$$|\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle| \leq |\underline{u}|\ |\underline{v}|. \tag{1.3}$$

Da (1.3) segue immediatamente che

$$-1 \leq \frac{\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle}{|\underline{u}|\ |\underline{v}|} \leq 1, \tag{1.4}$$

per ogni $\underline{u}$ e $\underline{v}$ come sopra. Grazie al fatto che la funzione coseno e' monotona strettamente decrescente (quindi invertibile) nell'intervallo reale $[0, \pi]$, abbiamo:

Definizione 1.3.4. *Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in uno spazio vettoriale euclideo V, definiamo l'***angolo convesso** *$\theta = \theta(\underline{u}, \underline{v})$ da essi formato quell'unico numero reale $\theta \in [0, \pi]$ tale che*

$$\cos\theta := \frac{\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle}{|\underline{u}|\ |\underline{v}|}. \tag{1.5}$$

In altre parole, denotata con

$$\arccos : [-1, 1] \to [0, \pi]$$

la funzione inversa della funzione coseno nell'intervallo in questione, abbiamo che

$$\theta := \arccos\left(\frac{\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle}{|\underline{u}|\ |\underline{v}|}\right).$$

* **Vettori ortogonali**.
La nozione di perpendicolarità tra vettori di uno spazio vettoriale euclideo può essere agevolmente introdotta imitando il caso del prodotto scalare geometrico:

Definizione 1.3.5. *Due vettori $\underline{u}$ e $\underline{v}$ di uno spazio vettoriale euclideo V si dicono* **perpendicolari** *(equivalentemente,* **ortogonali***) se*

$$\langle \underline{u}, \underline{v}\rangle = 0.$$

Osservazione 1.3.1. Come semplici conseguenze della precedente definizione, ritroviamo che $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono ortogonali se, e solo se, l'angolo convesso da essi formato è $\theta = \pi/2$. Inoltre, da (1.5), otteniamo una semplice relazione che lega il prodotto scalare tra i due vettori, l'angolo convesso da essi formato e le loro norme:

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = |\underline{u}| \; |\underline{v}| \; \cos \; \theta(\underline{u}, \underline{v}). \tag{1.6}$$

Riguardo alla perpendicolarità di vettori, vale la seguente

Definizione 1.3.6. *Un sistema di vettori $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ si dice un* **sistema di vettori ortogonali** *se i suoi elementi sono a due a due ortogonali, cioè se*

$$i \neq j \;\Rightarrow\; \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0, \;\; \forall\, i, j \in \{1, \ldots, r\}.$$

I sistemi di vettori ortogonali sono spesso più facili da studiare e più convenienti nelle applicazioni. Si consideri infatti la seguente:

Proposizione 1.3.2. *Sia $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ un sistema di vettori ortogonali. Se $\underline{v}_i \neq \underline{0}$ per ogni $i = 1, \ldots, r$, allora i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_r$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Dobbiamo provare che $\lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{v}_r = \underline{0} \Rightarrow \lambda_1 = \cdots = \lambda_r = 0$. A tale scopo osserviamo che

$$0 = \langle \underline{v}_i, \underline{0} \rangle = \langle \underline{v}_i, \lambda_1 \underline{v}_1 + \cdots + \lambda_r \underline{v}_r \rangle = \sum_{j=1,\ldots,r} \lambda_j \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle.$$

D'altra parte $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$ e quindi

$$0 = \sum_{j=1,\ldots,r} \lambda_j \langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \lambda_i \langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle.$$

Infine, essendo $\underline{v}_i \neq \underline{0}$, si ha $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle \neq 0$ e quindi $\lambda_i = 0$, $(i = 1, \ldots, r)$. $\square$

1.4 Basi ortogonali ed ortonormali

Abbiamo in particolare

Definizione 1.4.1. *Una* **base ortogonale** *è una base di uno spazio vettoriale euclideo V, formata da un sistema di vettori ortogonali.*

Il problema che vogliamo affrontare è dunque quello di *dimostrare che esistono sempre basi ortogonali* in uno spazio vettoriale euclideo. Siccome sappiamo che ogni spazio vettoriale ammette infinite basi, vogliamo far vedere che si puó sempre costruire una base ortogonale di uno spazio vettoriale euclideo a partire da una sua qualsiasi base.

L'algoritmo che permette una tale costruzione é noto come **Procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt**

Teorema 1.4.1. *Sia $v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$ una qualsiasi base di uno spazio vettoriale euclideo V. Per ogni $1 \leqslant s \leqslant n$, si consideri il sottospazio*

$$U_s := Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s), \quad 1 \leqslant s \leqslant n.$$

Allora esiste una base $w = \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_n$ dello spazio vettoriale V che é:

- *una base ortogonale per V, e*
- *$U_s = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s)$, per ogni $1 \leqslant s \leqslant n$.*

Dimostrazione. Procediamo per induzione su n.

Se $n = 1$, allora $V = U_1 = Span(\underline{v}_1)$, dove $\underline{v}_1$ costituisce una base di V. Una base formata da un solo vettore è sempre ortogonale quindi $\underline{v}_1$ è già una base ortogonale di V.

Sia ora $n > 1$, e supponiamo che il teorema sia vero in dimensione s, per qualche intero $s \leqslant n - 1$. Consideriamo i vettori $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s \in V$ ed il sottospazio U_s da essi generato. Per ipotesi induttiva su s, esiste una base ortogonale

$$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$$

del sottospazio U_s. Si noti inoltre che, sempre per ipotesi induttiva,

$$U_s = Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s) = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s).$$

Se consideriamo i sistemi di vettori

$$\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s, \underline{v}_{s+1} \quad \text{e} \quad \underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v}_{s+1},$$

essi generano lo stesso spazio e perció, per definizione di U_{s+1}, si ha

$$Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s, \underline{v}_{s+1}) = U_{s+1} = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v}_{s+1}).$$

Affermazione *Il vettore*

$$\underline{w}_{s+1} := \underline{v}_{s+1} - \sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i$$

è ortogonale a ciascun vettore $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s$. *Inoltre*

$$U_{s+1} = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{s+1}).$$

Dimostrazione di Affermazione Ricordiamo che, per ipotesi induttiva, i vettori $\underline{w}_j$ sono tali che $\langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = 0$, per $1 \leqslant i \neq j \leqslant s$. Quindi

$$\sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}_{s+1}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = \langle \underline{v}_{s+1}, \underline{w}_j \rangle;$$

Andando ad utilizzare la definizione di $\underline{w}_{s+1}$, si ha: $\langle \underline{w}_{s+1}, \underline{w}_j \rangle = \langle \underline{v}_{s+1}, \underline{w}_j \rangle - \langle \underline{v}_{s+1}, \underline{w}_j \rangle = 0$ e pertanto $\underline{w}_{s+1}$ è ortogonale ad ogni $\underline{w}_j$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

Per provare la seconda parte dell'Affermazione, ricordiamo che

$$Span(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_s, \underline{v}_{s+1}) = U_{s+1} = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v}_{s+1}).$$

Poiché w_{s+1} é combinazione lineare di $\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v}_{s+1}$, si ha ovviamente

$$Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{w}_{s+1}) \subseteq U_{s+1}.$$

Nello stesso modo si prova che

$$U_{s+1} \subseteq Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{w}_{s+1}).$$

Infatti $U_{s+1} = Span(\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_s, \underline{v}_{s+1})$ ed inoltre si ha

$$\underline{v}_{s+1} = \underline{w}_{s+1} + \sum_{i=1,\ldots,s} \frac{\langle \underline{v}, \underline{w}_i \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i.$$

Questo prova completamente l'Affermazione.

Per concludere la dimostrazione del Teorema 1.4.1, dalla Proposizione 1.3.2, i vettori

$$\underline{w}_1, \ldots, \underline{w}_{s+1}$$

sono linearmente indipendenti. Quindi costituiscono una base ortogoale di U_{s+1}. □

La cosa importante è applicare la dimostrazione in modo concreto tutte le volte che sia assegnato una base

$$v = \underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n$$

di V. Indichiamo i passi da compiere:

(1) Porre $\underline{w}_1 = \underline{v}_1$.

(2) Porre $\underline{w}_2 = \underline{v}_2 - \frac{\langle \underline{w}_1, \underline{v}_2 \rangle}{\langle \underline{w}_1, \underline{w}_1 \rangle} \underline{w}_1$.

$\vdots$

(k) Porre

$$\underline{w}_k = \underline{v}_k - \sum_{i=1,\dots,k-1,\ \underline{w}_i \neq \underline{0}} \frac{\langle \underline{w}_i, \underline{v}_k \rangle}{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle} \underline{w}_i$$

$\vdots$

(n) Dopo n passi il procedimento termina avendo costruito una base

$$w = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$$

ortogonale. Si noti che, per ogni $k = 1, \dots, n$, la costruzione è tale che

$$Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_k) = Span(\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_k).$$

Ciò segue immediatamente dalla dimostrazione del precedente teorema. I vettori $\underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$ generano dunque $Span(\underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n)$ e sono inoltre, per come sono stati costruiti, a due a due perpendicolari.

Nel seguito useremo il **simbolo di Kronecker** δ_{ij} per indicare il termine di posto i, j della matrice identità di ordine assegnato; questo vuol dire che $\delta_{ij} = 0$ se $i \neq j$ e che $\delta_{ij} = 1$ se $i = j$.

Definizione 1.4.2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Diremo che una base $v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è* **ortonormale** *se*

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = \delta_{ij}$$

Si noti che una base ortonormale $v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$ è certamente una base ortogonale, segue infatti dalla definizione che $\langle \underline{v}_i, \underline{v}_j \rangle = 0$ se $i \neq j$. La proprietà in più che caratterizza le basi ortonormali tra tutte le basi ortogonali è che

$$\langle \underline{v}_i, \underline{v}_i \rangle = 1,\ i = 1, \dots, n,$$

i.e. che ogni vettore $\underline{v}_i$ e' un versore per ogni $i = 1, \dots, n$.

• È facile osservare che la base canonica di $\mathbb{R}^n$ è una base ortonormale per il prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n; per costruire una **base ortonormale** di V è sufficiente costruire una **base ortogonale**

$$w = \underline{w}_1, \dots, \underline{w}_n$$

di V con il **procedimento di Gram-Schmidt**. Infatti, una volta costruita una base ortogonale w come sopra, e' sufficiente **versorizzare** i vettori di w ponendo, per ogni $i = 1, \dots, n$,

$$\underline{u}_i = \frac{1}{\sqrt{\langle \underline{w}_i, \underline{w}_i \rangle}} \underline{w}_i = \frac{\underline{w}_i}{|\underline{w}_i|}$$

ottenendo cosi' una base ortonormale

$$u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$$

dedotta da w. Abbiamo infatti gia' osservato che

$$\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \langle \frac{\underline{w}_i}{|\underline{w}_i|}, \quad \frac{\underline{w}_j}{|\underline{w}_j|} \rangle = \frac{1}{|\underline{w}_i||\underline{w}_j|} \quad \langle \underline{w}_i, \underline{w}_j \rangle = \delta_{ij}.$$

In particolare i vettori $\underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ sono non nulli, a due a due perpendicolari e tali che $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle = 1$. Le prime due proprietà implicano che tali vettori sono linearmente indipendenti. Quindi, essendo in numero uguale alla dimensione di V, essi formano una base ortogonale. L'ultima proprietà ci dice che tale base è ortonormale.

Avere a che fare con basi ortonormali, semplifica molte questioni computazionali.

Sia $u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ una qualsiasi base di V e sia

$$B_u := B_u(\langle \ , \ \rangle)$$

la matrice del prodotto scalare $\langle \ , \ \rangle$ rispetto alla base u. Poiché il termine di posto i, j di B_u è il prodotto scalare $\langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle$ è chiaro che:

Proposizione 1.4.2. *u è una base ortonormale se, e solo se, B_u è la matrice identità.*

Un'aaltra buona proprietà delle basi ortonormali è la seguente: siano $\underline{x}, \underline{y} \in V$ due vettori e sia

$$u = \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$$

una base ortonormale di V e sia $B_u := B_u(\langle \ , \ \rangle)$ la matrice del prodotto scalare rispetto alla base u. Allora sappiamo che:

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} B_u \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Poiché u è per ipotesi ortonormale, si ha che B_u è la matrice identità I_n quindi

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} I_n \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1, \ldots, x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1,\ldots,n} x_i y_i.$$

La precedente proprietà viene spesso riassunta a parole nel modo seguente:

(P1) *Se u è una base ortonormale il prodotto scalare $\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle$ è la somma dei prodotti delle coordinate omonime di $\underline{x}$ e $\underline{y}$ rispetto a u.*

In (P1) la terminologia "coordinate omonime" vuol dire coordinate di $\underline{x}$ e di $\underline{y}$ aventi indice uguale e cioè x_i e y_i, $1 \leq i \leq n$.

Un'ulteriore buona proprietà di una base ortonormale è che le coordinate di un vettore $\underline{v} \in V$ sono determinate dal prodotto scalare:

Proposizione 1.4.3. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$ una sua base ortonormale. Per ogni vettore $\underline{v} \in V$ la componente j-esima di $\underline{v}$ rispetto alla base u è il prodotto scalare*

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle.$$

Dimostrazione. Sia $\underline{v} = x_1\underline{u}_1 + \cdots + x_n\underline{u}_n$. Per provare la proprieta' basta osservare che

$$\langle \underline{v}, \underline{u}_j \rangle = \langle \sum_{i=1,\dots,n} x_i\underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1,\dots,n} x_i \langle \underline{u}_i, \underline{u}_j \rangle = \sum_{i=1,\dots,n} x_i \delta_{ij} = x_j.$$

$\square$

1.5 Basi ortonormali e matrici ortogonali. Il Gruppo ortogonale

Vediamo ora come sono le matrici cambiamento di base tra due basi ortonormali. Assegnate due basi ortonormali

$$u = \underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n$$

e

$$v = \underline{v}_1, \dots, \underline{v}_n$$

di uno spazio vettoriale euclideo V, le matrici

$$M_{uv} \text{ e } M_{vu},$$

rispettivamente, del cambiamento di base da u a v e da v ad u hanno un'importanza particolare.

Definizione 1.5.1. *Una matrice quadrata M si dice* **ortogonale** *se*

$$M^t\, M = I_n.$$

Equivalentemente M è una matrice ortogonale se, e solo se, M è invertibile e l'inversa di M coincide la trasposta di M:

$$M^{-1} = M^t.$$

Poiché invertibili, le matrici ortogonali costituiscono un sottoinsieme proprio del **gruppo lineare** $GL(n, \mathbb{R})$. Denotiamo questo sottoinsieme con

$$\mathcal{O}(n, \mathbb{R}) := \{M \in GL(n, \mathbb{R}) \mid M \text{ ortogonale}\} \subsetneq GL(n, \mathbb{R}).$$

Poiché:
• $I_n \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$;
• $M \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \Rightarrow\ M^{-1} = M^t \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$;
• $M, N \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R}) \ \Rightarrow\ MN \in \mathcal{O}(n, \mathbb{R})$, infatti dall'associativitá del prodotto tra matrici

$$(MN)^t(MN) = N^tM^tMN = N^tI_nN = I_n.$$

Pertanto

Definizione 1.5.2. *$\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ é un sottogruppo di $GL(n,\mathbb{R})$ ed esso viene chiamato* **gruppo delle matrici ortogonali** *- o semplicemente* **gruppo ortogonale** *- di ordine n.*

Dal Teorema di Binet e dal fatto che $M^tM = I_n$, si ha che se M e' una matrice ortogonale allora

$$\det(M) = \pm 1.$$

Definizione 1.5.3. *Una matrice ortogonale M si dice* **speciale ortogonale** *se*

$$\det(M) = 1,$$

si dice invece **ortogonale non-speciale** *se*

$$\det(M) = -1.$$

Poniamo

$$\mathcal{S}O(n,\mathbb{R}) := \{M \in \mathcal{O}(n,\mathbb{R}) \mid M \text{ speciale ortogonale}\}.$$

Abbiamo che

$$\mathcal{S}O(n,\mathbb{R}) \subsetneq GL(n,\mathbb{R})^+ = \{A \in GL(n,\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}$$

e, come per il sottogruppo $GL(n,\mathbb{R})^+$ di $GL(n,\mathbb{R})$, si ha:

Definizione 1.5.4. *$\mathcal{S}O(n,\mathbb{R})$ é un sottogruppo di $\mathcal{O}(n,\mathbb{R})$ che viene denominato* **gruppo speciale ortogonale** *di ordine n.*

Come per le matrici nell'insieme $GL(n,\mathbb{R})^-$, le matrici ortogonali non–speciali invece non formano un gruppo.

Perché interessarsi alle matrici ortogonali, al gruppo ortogonale ed al gruppo speciale ortogonale? Il fatto e' che le matrici ortogonali, come stiamo per vedere, sono esattamente le matrici del cambiamento di base tra due basi ortonormali.

Teorema 1.5.1. *Sia V uno spazio vettoriale e siano u e v due sue basi ortonormali rispetto ad uno stesso prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ su V. Allora la matrice del cambiamento di base M_{uv} è una matrice ortogonale.*

Dimostrazione. Siano $B_u := B_u(\langle,\rangle)$ e $B_v := B_v(\langle,\rangle)$ rispettivamente le matrici del prodotto scalare considerato rispetto alle basi u e v. Poiché u e v sono ortonormali si ha che $B_u = I_n = B_v$. Applicando (1.1), segue allora che

$$I_n = M_{uv}^t\ I_n\ M_{uv} =\ M_{uv}^t M_{uv}.$$

In altri termini $M_{uv}^{-1} = M_{uv}^t$, quindi M_{uv} è una matrice ortogonale. □

Un'altra fondamentale proprietá delle matrici ortognali é la seguente. Nelle stesse notazioni di Definizione 1.2.2, abbiamo:

Lemma 1.5.2. *Sia M una matrice ortogonale $n \times n$. Allora, per ogni matrice A $n \times n$, si ha la seguente identità:*

$$M^{-1}AM = M^t\ AM. \tag{1.7}$$

In particolare, se M e' ortogonale, due matrici A e B sono **simili** *(o* **coniugate***) se e solo se sono* **congruenti**.

Dimostrazione. Discende dal fatto immediato che, essendo M ortogonale, allora $M^t = M^{-1}$. □

1.6 Complemento ortogonale di un sottospazio. Proiettori su sottospazi.

Definizione 1.6.1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia $S \subset V$ un sottoinsieme non vuoto. L'insieme*

$$S^{\perp} := \{\underline{v} \in V \ \mid\ \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = 0,\ \forall\ \underline{u} \in S\}$$

è un sottospazio vettoriale di V detto **sottospazio ortogonale** *a S.*

In altri termini, anche se S è solo un sottoinsieme, $S^{\perp}$ ha sempre una struttura di sottospazio vettoriale di V. Se in particolare $S = \{\underline{u}\}$, per qualche $\underline{u} \in V$, allora scriveremo $\underline{u}^{\perp}$ invece di $\{\underline{u}\}^{\perp}$; in particolare, vale

$$\underline{u}^{\perp} = Span(\underline{u})^{\perp}.$$

È facile verificare che, se $S \subset V$ è anch'esso un sottospazio vettoriale, allora $S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\}$. Inoltre, se $u = \ \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_n$ è una base per S, risulta

$$S^{\perp} = \underline{u}_1^{\perp} \cap \cdots \cap \underline{u}_n^{\perp}.$$

Proposizione 1.6.1. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Sia $S \subset V$ un sottospazio vettoriale s dimensionale di V. Allora,*

$$V = S \oplus S^{\perp}.$$

In particolare, $dim\ S^{\perp} = n - s$.

Dimostrazione. Sia $u = \ \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_s$ una base per S. A meno di applicare Teorema 1.4.1, possiamo supporre che u sia una base ortogonale. Dal Teorema di estensione ad una base e dal Teorema 1.4.1, u si estende ad una base ortogonale $v = \ \underline{u}_1, \ldots, \underline{u}_s, \underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n$ per V. Per definizione di base ortogonale, $\underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n \in S^{\perp}$. Pertanto, $V = S + S^{\perp}$ ed i vettori $\underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n \in S^{\perp}$ sono linearmente indipendenti in $S^{\perp}$ perché lo sono in V. Da quanto osservato precedentemente, poiché si ha $S \cap S^{\perp} = \{\underline{0}\}$, allora $V = S \oplus S^{\perp}$ ed il sistema di vettori linearmente indipendenti $w = \ \underline{u}_{s+1}, \ldots, \underline{u}_n$ è una base per $S^{\perp}$. □

Definizione 1.6.2. *Dato S un sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale euclideo V, $S^{\perp}$ viene detto il* **complemento (o supplemento) ortogonale** *di S.*

Quanto osservato precedentemente, permette di dare ulteriori importanti definizioni, che riguardano endomorfismi naturali in uno spazio vettoriale euclideo.

Definizione 1.6.3. *Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$ in uno spazio vettoriale euclideo V, definiamo la* **proiezione del vettore $\underline{u}$ lungo la direzione determinata dal vettore $\underline{v}$** *(i.e. sulla retta vettoriale $Span(\underline{v})$) il vettore*

$$\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$$

definito dalla condizione:

$$\underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}) \text{ perpendicolare a } \underline{v} \quad \Leftrightarrow \quad \langle \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}), \underline{v} \rangle = 0. \tag{1.8}$$

L'applicazione lineare $\pi_{\underline{v}}$ sopra definita si chiama **proiettore sul sottospazio** $Span(\underline{v})$.

È chiaro che si può definire, vicendevolmente, la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $\underline{u}$.

Ovviamente se $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente dipendenti, i.e. $\underline{u} \in Span(\underline{v})$, allora chiaramente si ha $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \underline{u}$. Pertanto, la precedente definizione è di interessante utilizzo principalmente quando $\underline{u}$ e $\underline{v}$ sono linearmente indipendenti. Utilizzando (1.5) e (1.6), abbiamo il seguente semplice risultato.

Proposizione 1.6.2. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione n. Dati due vettori non nulli $\underline{u}$ e $\underline{v}$, linearmente indipendenti in V si ha:*

(i) $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \lambda_{\underline{u}}\ \underline{v}$, *dove*

$$\lambda_{\underline{u}} := \frac{\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle}{||\underline{v}||} = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{v}|} \cos\theta(\underline{u}, \underline{v}) \in \mathbb{R}. \tag{1.9}$$

(ii) La proiezione π_v (1.8) determina una decomposizione ortogonale del vettore $\underline{u}$ in un vettore parallelo a $\underline{v}$, i.e. $\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$ come in (i), e di un vettore perpendicolare a $\underline{v}$, i.e.

$$\underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}) := \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \underline{u} - \lambda_{\underline{u}}\ \underline{v}.$$

In altri termini, $\underline{u}$ si esprime in modo unico come

$$\underline{u} = \pi_{\underline{v}}(\underline{u}) + \underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}),$$

con $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) \in Span(\underline{v})$ e $\underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u}) \in Span(\underline{v})^{\perp}$.

(a) Il vettore parallelo a $\underline{v}$, i.e. $\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$, viene chiamato **proiezione di $\underline{u}$ parallela alla direzione di $\underline{v}$**

(b) Il vettore perpendicolare a $\underline{v}$, i.e. $\underline{n}_{\underline{v}}(\underline{u})$, viene denominato **proiezione di $\underline{u}$ ortogonale alla direzione di $\underline{v}$.**

(iii) Si ha che $\mathrm{Im}(\pi_{\underline{v}}) = Span(\underline{v})$*, i.e.* $\mathrm{rg}(\pi_{\underline{v}}) = 1$.

(iv) Invece $\mathrm{Ker}(\pi_{\underline{v}}) = \underline{v}^{\perp}$*, i.e.* $\dim \mathrm{Ker}(\pi_{\underline{v}}) = n - 1$.

Dimostrazione di Proposizione 1.6.2. (i) Per definizione di proiezione $\pi_{\underline{v}}$, il vettore $\pi_{\underline{v}}(\underline{u})$ dovrà appartenere a $Span(\underline{v})$. In tal caso esiste, ed è univocamente determinato, uno scalare non nullo $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\pi_{\underline{v}}(\underline{u}) = \lambda\ \underline{v}$. Vogliamo determinare tale λ in funzione di $\underline{u}$ e $\underline{v}$. Per fare questo, utilizziamo (1.8):

$$0 = \langle \underline{u} - \pi_{\underline{v}}(\underline{u}), \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \lambda \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle - \lambda ||\underline{v}||,$$

che fornisce la prima eguaglianza in (1.9). La seconda eguaglianza è chiaramente conseguenza della prima e di (1.6).
(ii) È ovvia conseguenza di (i) e di (1.8).
(iii) Per tutti i vettori $\underline{w} \in Span(\underline{v})$ si ha ovviamente $\pi_{\underline{v}}(\underline{w}) = \underline{w}$; pertanto $\pi_{\underline{v}}$ é suriettiva su $Span(\underline{v})$.
(iv) Dal Teorema del Rango, o Teorema di Nullitá piú Rango, si ha che

$$\dim \mathrm{Ker}(\pi_{\underline{v}}) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(\pi_{\underline{v}}) = n - 1$$

ed in effetti i vettori nel supplemento ortogonale di $Span(\underline{v})$, i.e. i vettori in $\underline{v}^{\perp}$, vengono proiettati nel vettore nullo di $Span(\underline{v})$. □

Non limitandosi a proiettare solo su rette vettoriali, più in generale, sia ora U un sottospazio vettoriale di V tale che $\dim U = k \geqslant 1$. Da Proposizione 1.6.1, si ha la decomposizione ortogonale

$$V = U \oplus U^{\perp},$$

dove $U^{\perp}$ è il complemento ortogonale di U rispetto al prodotto scalare $\langle\ ,\ \rangle$ fissato su V (cf. Definizione 1.6.2). Poiche' la somma e' diretta, ogni vettore $\underline{v} \in V$ si scrive in modo unico come

$$\underline{v} = \underline{v}_U + \underline{v}_{U^{\perp}}, \ \text{ con } \ \underline{v}_U \in U, \ \underline{v}_{U^{\perp}} \in U^{\perp}. \tag{1.10}$$

Definizione 1.6.4. *Dato un vettore* $\underline{v}$ *ed un sottospazio vettoriale* U *non nulli in uno spazio vettoriale euclideo* V*, definiamo le* **proiezioni** *di* $\underline{v}$ *sui sottospazi* U *ed* $U^{\perp}$*, rispettivamente, i vettori*

$$\pi_U(\underline{v}) := \underline{v}_U \ \text{ e } \ \pi_{U^{\perp}}(\underline{v}) := \underline{v}_{U^{\perp}}$$

come in (1.10).

Proposizione 1.6.3. *Siano* U *e* $\underline{v}$ *come sopra. Sia* $dim\ U = k < n = dim(V)$*. Sia* $u = \underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k$ *una qualsiasi base ortogonale per* U*. La proiezione di* $\underline{v}$ *su* U *è il vettore*

$$\pi_U(\underline{v}) = \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_1 \rangle}{\langle \underline{u}_1, \underline{u}_1 \rangle} \underline{u}_1 + \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_2 \rangle}{\langle \underline{u}_2, \underline{u}_2 \rangle} \underline{u}_2 + \ldots + \frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_k \rangle}{\langle \underline{u}_k, \underline{u}_k \rangle} \underline{u}_k. \tag{1.11}$$

Equivalentemente, $\pi_U(\underline{v})$ è il vettore la cui i-esima componente rispetto alla base u di U è:

$$\frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle}{\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle}, \quad 1 \leq i \leq k.$$

In particolare,

$$\mathrm{Im}(\pi_U) = U \quad \text{e} \quad \mathrm{Ker}(\pi_U) = U^{\perp}.$$

In modo analogo, da (1.10), la proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $U^{\perp}$ sarà data da $\underline{v} - \pi_U(\underline{v})$. Notiamo inoltre che, nel caso in cui u sia una base ortonormale, per $\pi_U(\underline{v})$ ritroviamo quanto dimostrato in Proposizione 1.4.3.

Dimostrazione di Proposizione 1.6.3. Per il teorema di completamento ad una base ed il procedimento di Gram-Schmidt, troviamo una base

$$v = \ \underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_k, \underline{u}_{k+1}, \ldots, \underline{u}_n$$

di V che è ortogonale e che completa la base data di U; in particolare, $u' := \ \underline{u}_{k+1}, \underline{u}_{k+2}, \ldots, \underline{u}_n$ è una base ortogonale per $U^{\perp}$. Rispetto a tale base di V, ragionando come in Proposizioni 1.4.3 e 1.6.2-(i), la i-esima coordinata di $\underline{v}$ rispetto alla base u è data da

$$\frac{\langle \underline{v}, \underline{u}_i \rangle}{\langle \underline{u}_i, \underline{u}_i \rangle}, \ 1 \leq i \leq n.$$

Pertanto, per l'unicità della decomposizione (1.10), abbiamo l'asserto.

Per concludere, le asserzioni su $\mathrm{Im}(\pi_U)$ e su $\mathrm{Ker}(\pi_U)$ si dimostrano come nella dimostrazione di Proposizione 1.6.2. $\square$