§8 Classificazione coniche proiettive

In tutto il capitolo, $\mathbb{K}$ sarà o $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$

Si vuole capire quando due coniche proiettive sono **proiettivamente equivalenti**, i.e. esiste una proiettività che trasformi l'equazione della prima conica in quella della seconda conica

Ma se $\Gamma_1 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è una conica $\Rightarrow$ considero la sua equazione cartesiana che è una forma quadratica

$$(*) \qquad f_1(x_0, x_1, x_2) = 0$$

Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ sappiamo che esiste sempre un cambiamento di riferimento $\underline{x} = M\underline{y}$ per cui $(*)$ si trasforma nella forma normale con coefficienti 1 (tanti 1 quanto $rg(\Gamma_1)$) e tanti 0 quanto è l'indice di nullità della f.q. associata a Γ_1

Se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ esiste, per il thm. di Sylvester, la forma canonica di Sylvester dove stavolta i coefficienti sono 1, -1 e 0

Poichè il cambiamento suddetto corrisponde ad una proiettività

$$\rho\, \underline{x} = M y \qquad \rho \in \mathbb{K}^*$$

in particolare la conica originaria Γ_1 è scrivibile nel riferimento $[x_0, x_1, x_2]$ come $f_1(x_0, x_1, x_2) = 0$ ma nel riferimento $[y_0, y_1, y_2]$ come polinomio omogeneo in forma normale ($\mathbb{K} = \mathbb{C}$) o di Sylvester ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$)

Poichè l'inversa di una proiettività è una proiettività e la composizione di due proiettività è una proiettività, si ha

Proposizione

(1) Se Γ_1 e Γ_2 hanno stessa forma normale (per $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) allora $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono sicuramente proiettivamente equivalenti in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

(2) Se $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ hanno stessa forma canonica di Sylvester (per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) allora $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ proiettivamente equivalenti

Ma ancora si può migliorare, fornendo CNES per stabilire se 2 coniche reali o complesse sono proiettiv. equivalenti

Si tratta di vedere quali sono i polinomi omogenei di grado due nelle indeterminate X_0, X_1, X_2 che sono atti a fornire A MENO DI PROIETTIVITÀ le equazioni cartesiane omogenee di coniche proiettive. Tale equazioni verranno dette ==forme canoniche proiettive per le coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$==

Per capire il meccanismo, studiamo prima quadriche in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

8.1 Classificazione proiettiva delle quadriche su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Sappiamo che le quadriche in questo caso sono esclusivamente

* $\Gamma' = 2B$, ove $B = [b_0, b_1] \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, degenere

Per la teoria delle f.q. l'equazione cartesiana di una siffatta Γ' si può sempre ridurre a

(1) $\boxed{Y_0^2 = 0}$ f. canonica complessa proiettiva quadrica degenere su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

e $B = [0, 1]$ nel riferimento $[Y_0, Y_1]$

* $\Gamma' = B_0 + B_1$, con $B_0 \neq B_1 \in \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$, non degenere

Sempre per la teoria svolta, l'altra possibilità è

(2) $\boxed{Y_0^2 + Y_1^2 = 0}$ f. canonica complessa proiettiva quadrica non degenere in $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$

ed in questo caso $B_0 = [1, i]$ e $B_1 = [1, -i]$ nel riferimento $[Y_0, Y_1]$

2 quadriche su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ sono proiettivamente equivalenti $\Leftrightarrow$ entrambe hanno f. canonica proiettiva (1) oppure (2) $\Leftrightarrow$ hanno lo stesso rango

Caso $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ Per Sylvester abbiamo

(1) $Y_0^2 = 0$ (2) $Y_0^2 + Y_1^2 = 0$ (3) $Y_0^2 - Y_1^2 = 0$

(4) $-Y_0^2 - Y_1^2 = 0$

Ma osserviamo che (2) e (4) individuano la stessa conica quindi le forme canoniche proiettive reali sono

$\boxed{y_0^2 = 0}$ quadrica proiettiva reale degenere $B=[0,1]$ nel riferimento $[y_0, y_1]$

$\boxed{y_0^2 + y_1^2 = 0}$ quadrica proiettiva reale non degenere ma priva di punti reali (o conica vuota)

$\boxed{y_0^2 - y_1^2 = 0}$ quadrica proiettiva reale non degenere e $B_0 = [1,1]$, $B_1 = [1,-1]$ cioè 2 punti reali perchè $y_0^2 - y_1^2 = (y_0 - y_1)(y_0 + y_1) = 0$

Pertanto 2 quadriche su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ sono classificate da

$rg(T') = 1$ oppure 2 e in $rg = 2$ da alme segnature

se $rg = 1$ — allora ~~tutte~~ le quadriche degeneri su $\mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}$ sono tutte e sole quelle proiettivam. equivalenti fra loro

se $rg = 2$ — le quadriche non degeneri sono proiettiv. equivalenti se e solo se o hanno entrambe segnatura $(2,0)$ (equiv. $(0,2)$) oppure $(1,1)$

Con il criterio di Sylvester, senza necessariamente arrivare alla forma canonica di Sylvester so subito stabilire se la segnatura è $(2,0)$ oppure $(0,2)$ a partire dall'equazione originaria $\,^t\underline{x} A \underline{x} = 0$

8.2 Classificazione proiettiva delle coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$

Allo stesso modo, date $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si vuole capire quando Γ_1 è proiettivamente equivalente a Γ_2, cioè

$$\exists\, f \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}) \text{ t.c. } f(\Gamma_1) = \Gamma_2$$

Come il ragionamento di prima per $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$, si vuole capire se due equazioni descrivono la stessa conica ma in 2 riferimenti omogenei diversi.
Ma allora si vuole trovare un riferimento opportuno per $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ in cui l'equazione di una conica $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ si riduca alla forma più semplice possibile (forma canonica proiettiva)

Ma allora, come nel ragionamento fatto per $\mathbb{P}^1_{\mathbb{K}}$

$\Gamma_1, \Gamma_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ sono proiettivamente equivalenti
$\Leftrightarrow$ hanno stessa forma canonica proiettiva su $\mathbb{K}$

Infatti

${}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} = 0$ si può sempre ridurre mediante un cambiamento $\underline{x} = M\underline{y}$ (e quindi una proiettività) ad una delle forme normali (se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) o di Sylvester (se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$).
Bisogna stabilire quale tra le forme normali o di Sylvester individuano la stessa conica

Su $\mathbb{K} = \mathbb{C}$

Forme normali		Equazioni di coniche
• y_0^2	$rg = 1$	$y_0^2 = 0$
• $y_0^2 + y_1^2$	$rg = 2$	$y_0^2 + y_1^2 = 0$
• $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2$	$rg = 3$	$y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$

→ necessariament tutte differenti

il rango è invariante per congruenza!

Su $\mathbb{K} = \mathbb{R}$

Forme di Sylvester — **Equazioni di coniche**

(1) y_0^2 $\quad rg = 1 \quad$ $y_0^2 = 0$

(2) $y_0^2 + y_1^2$ $\xrightarrow{rg = 2}$

(3) $-y_0^2 - y_1^2$ $\xrightarrow{rg = 2}$ $y_0^2 + y_1^2 = 0 = -(y_0^2 + y_1^2)$ stessa equaz.

(4) $y_0^2 - y_1^2$ $\xrightarrow{rg = 2}$ $y_0^2 - y_1^2 = 0$ equazione diversa dalle 2 precedenti

(5) $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2$ $\xrightarrow{rg = 3}$

(6) $-y_0^2 - y_1^2 - y_2^2$ $\xrightarrow{rg = 3}$ $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = -(y_0^2 + y_1^2 + y_2^2) = 0$ stesse equaz.

(7) $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2$ $\longrightarrow$

(8) $y_0^2 - y_1^2 - y_2^2$ $\longrightarrow$ a meno di proiettività coincidono con $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$

(7) e (8) sono proiettivamente equivalenti perchè

$$y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0 = -(y_0^2 + y_1^2 - y_2^2) = -y_0^2 - y_1^2 + y_2^2$$ e poi con

$$\begin{cases} \rho z_0 = y_2 \\ \rho z_1 = y_0 \\ \rho z_2 = y_1 \end{cases}$$

porto l'equazione $y_2^2 - y_0^2 - y_1^2 = 0$ in

$$z_0^2 - z_1^2 - z_2^2 = 0$$

Pertanto asseriamo che

Forme canoniche proiettive di coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

(1) $\boxed{y_0^2 = 0}$ Conica complessa proiettiva doppiamente degener.

$\Gamma = 2\ell$ dove $\ell: y_0 = 0$ nel riferimento $[y_0, y_1, ...$
$rg(\Gamma) = 1$

(2) $\boxed{y_0^2 + y_1^2 = 0}$ Conica complessa proiettiva sempl. deg.

$rg(\Gamma) = 2 \Rightarrow \Gamma = \ell_1 + \ell_2$

(3) $\boxed{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0}$ conica compl. proj. non deg.

$rg(\Gamma) = 3 \Rightarrow \Gamma$ ha infiniti punti

Poiché $rg(\Gamma)$ è invariante per proiettività, effettivamente (1), (2) e (3) non sono proj. equiv. l'una all'altra

Forme canoniche proiettive di coniche in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$

(1) $\boxed{y_0^2 = 0}$ come sopra

(2) $\boxed{y_0^2 + y_1^2 = 0}$ come sopra

(3) $\boxed{y_0^2 - y_1^2 = 0}$ nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ non c'era
$rg(\Gamma) = 2$ ma terna di inerzia $(P_+, P_-, n) = (1, 1, 0)$

(4) $\boxed{y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0}$ come sopra

(5) $\boxed{y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0}$ nel caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ non c'era
ma $rg(\Gamma) = 3$ e segnatura $(2, 1)$

Verifichiamo che effettivamente queste sono tutte e sole le forme canoniche proiettive di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con $\mathbb{K} = \mathbb{C}, \mathbb{R}$

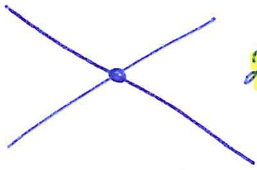
Coniche degeneri — eq. canoniche proiettive

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ (con f.q.)

$\boxed{r=1}$ $y_0^2=0$ ⇝ in un riferimento dove $\underset{U_1}{[0,1,0]}$ e $\underset{U_2}{[0,0,1]}$ doppi ⇒ Γ era una retta doppia

$\boxed{r=2}$ $y_0^2+y_1^2=0$ ⇝ $[0,0,1]=U_2$ è doppio perché y_2 non compare mai

$$(y_0+iy_1)(y_0-iy_1)=0$$



2 rette incid.

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ (con f.q.)

$\boxed{r=1}$ come prima $y_0^2=0$

$\boxed{r=2}$ * $y_0^2+y_1^2=0$ è puntiforme $[0,0,1]$ doppio
ha ! punto reale

* $y_0^2-y_1^2=0$ è 2 rette reali incidenti
ha ∞ punti reali

Coniche non degeneri — eq. canoniche proiettive

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ con f.q.

$\boxed{r=3}$ $y_0^2+y_1^2+y_2^2=0$ ⇒ Γ irrid. e non singolare ∞ punti

In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con f.q.

$\boxed{r=3}$

* $y_0^2+y_1^2+y_2^2=0$ ⇒ Γ irrid. non sing ma $\mathrm{Supp}(\Gamma)=\emptyset$
conica non deg. senza pti reali

* $y_0^2+y_1^2-y_2^2=0$ ⇒ Γ irrid non sing ma $\mathrm{supp}(\Gamma)$ infiniti punti

Infatti in $\mathbb{A}^2_0$ è un'iperbole
in $\mathbb{A}^2_1$ è un'iperbole
in $\mathbb{A}^2_2$ è un'ellisse

Come faccio a capire se una conica reale di $rg = 2$ o 3 ha ∞ punti reali o meno?

Γ: ${}^t\underline{x}\, A\, \underline{x} = 0$

Se non degenere $\Rightarrow \det(A) \neq 0$

Se Γ è proiettiv. equiv. a $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$ (equiv. $-y_0^2 - y_1^2 - y_2^2 = 0$)

$\Rightarrow \Phi(\underline{x})$ è f.q. o def positiva o def. negativa

Se $\Phi(\underline{x})$ def. positiva — **Criterio di Sylvester**

$\alpha_{11} = a_{00} > 0$

$\frac{\alpha_{22}}{\alpha_{11}} \rightsquigarrow +1 \Rightarrow \alpha_{22} > 0 \Leftrightarrow$ tutti positivi

$\frac{\alpha_{33}}{\alpha_{22}} \rightsquigarrow +1 \Rightarrow \alpha_{33} > 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \cdot \alpha_{33} > 0 \\ \alpha_{22} > 0 \end{cases}$

Se $\Phi(\underline{x})$ def. negativa — **Criterio Sylvester**

minore testa 1x1 $\alpha_{11} < 0$ posto dispari

minore testa 2x2 $\alpha_{22} > 0$ posto pari

minore testa 3x3 $\alpha_{33} < 0$ posto disp.

$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_{11} \cdot \alpha_3 > 0 \\ \alpha_{22} > 0 \end{cases}$

Invece per indefinita ciò è falso perchè ad esempio:
$y_0^2 + y_1^2 - y_2^2$ fornisce la matrice

$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} \alpha_{11} > 0 \\ \alpha_{22} > 0 \\ \alpha_{33} < 0 \end{matrix}$

α_{ii} = minori di testa di A

$\Rightarrow$ non può essere né def. positiva né def. negativa
$\Rightarrow$ è indefinita

Lemma 8.2.7

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ reale non deg. è priva di punti reali $\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a_{00}\det(A) > 0 \\ \det(A(1,2|1,2)) = \alpha_{22} > 0 \end{cases}$$

Oss $\Gamma, \Gamma' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ sono proiettivamente equivalenti se e solo se hanno stessa forma canonica proiettiva

Conseguenza

Prop. 8.2.6 Due coniche di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ sono proiett. equivalenti $\Leftrightarrow$ $rg(\Gamma) = rg(\Gamma')$

Per $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ è falso!

* $y_0^2 + y_1^2 + y_2^2 = 0$ non proiettivamente equivalente a $y_0^2 + y_1^2 - y_2^2 = 0$ perché una a supporto vuoto mentre la seconda con infiniti punti reali

* $y_0^2 + y_1^2 = 0$ non proiettivamente equivalente a $y_0^2 - y_1^2 = 0$ perché una a supporto puntiforme mentre $y_0^2 - y_1^2 = 0$ è l'unione di due rette incidenti

c'è dunque una maggiore stratificazione rispetto al semplice rango: servono rango e indici di inerzia

8.3 Studio coniche affini

$\mathbb{K}$ sempre o $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ con coord. omogenee $[x_0, x_1, x_2]$

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ visto come la carta affine $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{x_0 = 0\}$ quindi coord. affini

$$x = \frac{x_1}{x_0} \qquad y = \frac{x_2}{x_0}$$

Attenzione: svolispense si pone

$[x_0, x_1, x_2] \longrightarrow [x_1, x_2, x_0]$ e poi rinomina $x_0 = x_3$

cioè coord. omogenee $[x_1, x_2, x_3]$ e si divide per x_3

cioè $$x = \frac{x_1}{x_3} \qquad y = \frac{x_2}{x_3}$$

Osservazione preliminare

$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}$ induce una naturale inclusione di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

infatti

due terne di numeri reali sono proporzionali come terne complesse se e solo se sono proporzionali su $\mathbb{R}$

In particolare, ogni riferimento proiettivo in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ induce un riferimento in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ che viene detto riferimento reale per $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

Quando faremo la distinzione tra punti a coordinate reali in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ rispetto al riferimento reale di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ e punti a coordinate numeri complessi diremo che $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ si riguarda come piano proiettivo reale ampliato con punti immaginari o piano proiettivo complessificato

I punti reali del p.p. complessificato sono quelli a coord reali

Le coniche reali del p.p. complessificato sono quelle che ammettono eq. cartesiana reale in un $\forall$ riferimento reale

I cambiamenti di riferimento in un P.P. complessificato coincidono con quelli di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$, cioè solo proiettività indotte da matrici invertibili reali ②

$\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ e $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ p.p. complesso oppure complessificato)

$$(1) \quad \boxed{f(x_0,x_1,x_2) = a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 + a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2}$$

La deomogeneizzazione rispetto a x_0 fornisce

$$(2) \quad \boxed{f(1,x,y) = a_{00} + 2a_{01}x + 2a_{02}y + a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 = 0}$$

$f(1,x,y)$ non è un polinomio di grado 2 $\Leftrightarrow$ $a_{11} = a_{12} = a_{22} = 0$

$\Leftrightarrow$ Γ avrà equazione cartesiana

$$\Gamma: \ a_{00}x_0^2 + 2a_{01}x_0x_1 + 2a_{02}x_0x_2 = 0$$

$\Leftrightarrow$ Γ era conica riducibile degenere con la retta $x_0 = 0$ come componente irriducibile

rispetto alla carta affine

Def 8.3.1 $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ è conica propria se non contiene la retta $x_0 = 0$ (che è r_∞ retta impropria per $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$) come componente irriducibile

Pertanto se Γ conica propria di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, la traccia di Γ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ carta affine dove $x_0 \neq 0$ è il luogo geometrico di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ definito da (2) che ne è una sua eq. cartesiana

$$(3) \quad \boxed{\begin{aligned} f(1,x,y) &= \underbrace{a_{00}}_{f_0(x,y)} + \underbrace{2a_{01}x + 2a_{02}y}_{f_1(x,y)} + \underbrace{a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2}_{f_2(x,y)} \\ &= f_0(x,y) + f_1(x,y) + f_2(x,y) \end{aligned}}$$

$f_i(x,y)$ = omogeneo in x,y di grado i

Viceversa, l'omogeneizzazione rispetto a x_0 di $f(1,x,y)$ fornisce $f(x_0,x_1,x_2)$ come in (1)

Pertanto, se Γ è conica propria

(a) $\Gamma \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è conica affine che è traccia di Γ nella carta affine $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ dove $x_0 \neq 0$

La denotiamo con γ_0 (si possono fare le tracce γ_1, γ_2)

e ha equazione cartesiana

$$f(1,x,y)=0 \quad \text{come in (2) e in (3)}$$

(b) Il completamento proiettivo di γ_0 (equiv. di γ_1 e γ_2) rifornisce la conica $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ di partenza la cui equazione cartesiana è la omogeneizzazione rispetto a X_0 (nel caso γ_1 rispetto X_1, nel caso γ_2 rispetto a X_2) di $f(1,x,y)$

Cioè $\exists$ corrispondenza 1-1 tra

$$\{\text{Coniche proprie di } \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}\} \longleftrightarrow \{\text{Coniche affini } \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}\}$$

$$\Gamma = [f(x_0,x_1,x_2)=0] \longrightarrow \gamma_0 = [f(1,x,y)=0]$$

$$\bar{\gamma} = \left[x_0^2\, g\left(\frac{x_1}{x_0}, \frac{x_2}{x_0}\right)=0\right] \longleftarrow \gamma = [g(x,y)=0]$$

g polinomio come in (2) e (3)

In tale corrispondenza, matrice associata a γ_0 è la matrice simmetrica associata a Γ t.c.

$$0 = f(x_0,x_1,x_2) = \underline{X}^t A \underline{X} = (x_0\ x_1\ x_2)\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2\end{pmatrix}$$

Per ottenere equazione cartesiana di $\gamma_0 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ ④
si ha

$$f(1,x,y) = (1 \; x \; y) \; A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Pertanto A è anche associata a γ_0 come matrice simmetrica

* Un'affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è in particolare una proiettività di $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ che fissa la retta $x_0 = 0$, pertanto, posto

$$\underline{X} = [x_0, x_1, x_2] \qquad \underline{Y} = [y_0, y_1, y_2]$$

$$x = \frac{x_1}{x_0} \quad y = \frac{x_2}{x_0} \qquad x' = \frac{y_1}{y_0} \quad y' = \frac{y_2}{y_0}$$

$$\rho \underline{X} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \underline{Y} \quad \text{proiettività che fissa } x_0 = 0$$

$$= \tilde{M} \; \underline{Y} \qquad \text{con } \tilde{M} \in GL(3, \mathbb{K})$$

Quando

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$$= M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

$\det(M) = \det(\tilde{M}) \neq 0$
è affinità di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$

Poiché la trasformazione $\underline{X} = \tilde{M} \underline{Y}$ trasforma eq. di Γ in

$$\Gamma': \; \underline{Y}^t B \underline{Y} = \underline{X}^t \tilde{M}^t A \tilde{M} \underline{X} = 0$$

se $\underline{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$ e $\underline{Y} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$ vale comunque $B = \tilde{M}^t A \tilde{M}$

B ed A hanno quindi stesso rango e dunque

$rg(\Gamma') = rg(\gamma_0)$ è un invariante affine delle coniche

$$rg(\gamma_0) = \begin{cases} 3 \\ 2 \\ 1 \end{cases}$$

3 conica affine non-degenere

2 " " semplicemente degenere

1 " " doppiamente degenere

Notiamo che

$$A = \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$ → A_{00} sottomatrice di A

Per la forma di

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & m_{11} & m_{12} \\ c_2 & m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$ → $M \in GL(2, \mathbb{K})$

$B = {}^t\tilde{M} A \tilde{M}$ fornisce anche $\boxed{B_{00} = {}^tM A_{00} M}$

Pertanto

pure il rango di A_{00} è invariante (o proprietà affine) delle coniche aff (ma non proiettivo)

$$\det(A_{00}) = \begin{cases} \neq 0 & \text{conica a centro} \\ = 0 & \text{parabola} \end{cases}$$

Osservazione 8.3.3

I punti impropri di $\gamma_0 \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ sono dati da

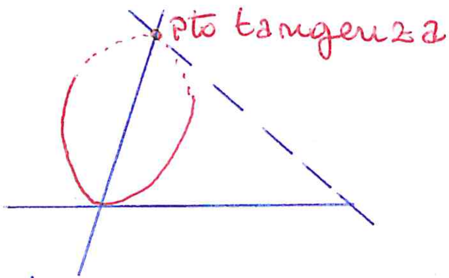
$\Gamma \cap \{x_0 = 0\}$ e sono dunque soluzione di

$$f(0, x_1, x_2) = 0 = (x_1\ x_2)\, A_{00} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2$$

- Se $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ piano complesso trovamo

  * 2 punti distinti se $\Delta = 4(a_{12}^2 - a_{11}a_{22}) = -4\det(A_{00}) \neq 0$
  * 1 solo punto di molteplicità 2 se $\Delta = -4\det(A_{00}) = 0$

  cioè una parabola è tangente a $x_0 = 0$ nel suo punto improprio



- Se $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ piano proiettivo complessificato

poiché ho γ_0 equazione reale ~~[illegible]~~ si ha che A è matrice simmetrica reale $\Rightarrow A_{00}$ è reale ~~[illegible]~~

e c'è differenza se nel caso di 2 punti distinti essi sono

→ tutti e due reali $\Leftrightarrow \Delta > 0 \Leftrightarrow \det(A_{00}) < 0$

→ uno il complesso coniugato dell'altro $\Leftrightarrow \Delta < 0 \Leftrightarrow \det(A_{00}) > 0$

~~[illegible]~~

- In $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ piano proiettivo reale

$\det(A_{00}) < 0 \Leftrightarrow \gamma_0$ ha 2 punti impropri distinti

$\det(A_{00}) > 0 \Leftrightarrow \gamma_0$ non ha punti impropri, cioè γ_0 è una conica al finito

Poiché in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ o nel piano proiettivo complessificato (*)
i cambiamenti di riferimento $\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{M} \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix}$ sono
<u>solo reali</u> e <u>fissano la retta $x_0 = 0$</u> $\Rightarrow$

Il numero di punti e la tipologia di punti (reali o complessi coniugati) impropri sono invarianti affini e permettono di distinguere le coniche in differenti tipologie

$$\det(A_{00}) > 0 \iff \gamma_0 \text{ è } \underline{\text{ellisse}}$$

$$\det(A_{00}) < 0 \iff \gamma_0 \text{ è } \underline{\text{iperbole}}$$

<u>Esempio</u>

* $\gamma_0 : x^2 + y^2 = 1$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\det(A_{00}) = 1 > 0$

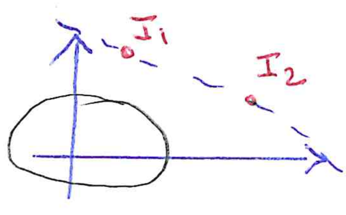
Punti impropri di γ_0 : $\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $I_1 = [0, 1, i]$, $I_2 = [0, 1, -i]$

punti ciclici su $x_0 = 0$

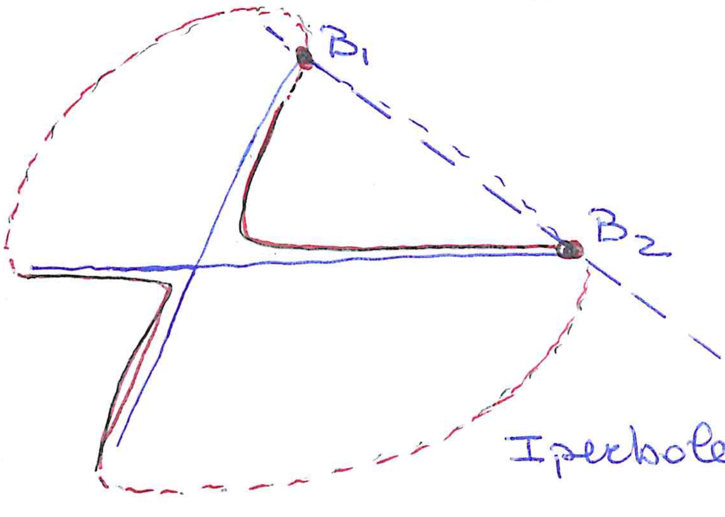
* $\gamma_0 : x^2 - y^2 = 1$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\rightarrow$ $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\det(A_{00}) = -1 < 0$

punti impropri di γ_0 $\begin{cases} x_1^2 - x_2^2 = 0 \\ x_0 = 0 \end{cases}$ $\rightarrow$ $B_1 = [0, 1, 1]$, $B_2 = [0, 1, -1]$

In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$



Ellisse



Iperbole

Infine, poiché i cambiamenti di riferimento affine fissano la retta impropria di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$, cioè $x_0 = 0$ in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$, in particolare, da ③

$$B_{00} = M^t A_{00} M \Rightarrow \det(B_{00}) = \det(A_{00}) \cdot \det(M^2)$$

* essere tangente alla retta impropria (cioè essere parabola) è un invariante o proprietà affine

* essere conica a centro è invariante o proprietà affine

* avere $\det(A_{00}) > 0$ se A reale (cioè essere ellisse) è invariante o proprietà affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato o in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

* avere $\det(A_{00}) < 0$ se A è reale (cioè essere iperbole) è invariante o proprietà affine in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato o in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

Pertanto

$\gamma \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ <u>non degenere</u> è

γ parabola $\Leftrightarrow$ $\overline{\gamma} = \Gamma$ è tangente a $\{x_0 = 0\} = r_\infty$

γ è a centro $\Leftrightarrow$ $\overline{\gamma} = \Gamma$ è

- <u>In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$</u> Γ secante $\{x_0 = 0\} = r_\infty$

- <u>In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato</u> Γ è secante $\{x_0 = 0\} = r_\infty$ e nello specifico
  - γ ellisse $\Leftrightarrow$ 2 punti compl. coniugati
  - γ iperbole $\Leftrightarrow$ 2 punti reali

  Il luogo dei punti reali di un ellisse non interseca r_∞

- <u>In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$</u> nello specifico
  - iperbole $\Leftrightarrow$ secante $\{x_0 = 0\} = r_\infty$
  - ellisse $\Leftrightarrow$ non interseca $\{x_0 = 0\} = r_\infty$

  Interseca in punti reali r_∞

Perché il nome di centro?

$\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complesso

I punti su $r_\infty : \{x_0 = 0\}$ sono 2 distinti $\Rightarrow$

$\{x_0 = 0\}$ non è tangente a Γ

Poiché Γ non degenere, $\omega_\Gamma : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^{2\vee}$ è proiettività

e ogni retta di $\mathbb{P}^2$ è polare rispetto a Γ di un punto

che è suo polo

Il polo della retta impropria è un punto

fuori di r_∞ (perché r_∞ non è tg. a Γ)

$\Rightarrow$ sia C questo polo con $C \in \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}} \setminus \{x_0 = 0\} = \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^2$

Detti B_1 e B_2 i due punti impropri di Γ

le rette proiettive $\langle C, B_1 \rangle$ e $\langle C, B_2 \rangle \subset \mathbb{P}^2$

hanno traccia due rette affini passanti per

C e con direzioni date da $B_1 = [0, l_1, m_1]$ e

$B_2 = [0, l_2, m_2]$

C è il centro e le rette $\langle C, B_1 \rangle \langle C, B_2 \rangle$ sono

individuate così:

poiché $U_1 = [0, 1, 0]$ e $U_2 = [0, 0, 1] \in r_\infty = \omega_C$ polare di C

$$C \in \omega_{U_1} \text{ polare di } U_1 \quad e \quad C \in \omega_{U_2} \text{ polare di } U_2$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{C = \omega_{U_1} \cap \omega_{U_2}}$$

Polare di U_1

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} \\ a_{01} & a_{11} & a_{12} \\ a_{02} & a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{01} & a_{11} & a_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a_{01} x_0 + a_{11} x_1 + a_{12} x_2 : \langle C, B_1 \rangle$$

la traccia di $\langle C, B_1 \rangle$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è la retta affine

$$\boxed{r : a_{11} x + a_{12} y + a_{01} = 0}$$

Analogamente

Polare di U_2.

$$\omega_{U_2} = \langle C, B_2 \rangle : a_{02} x_0 + a_{12} x_1 + a_{22} x_2 = 0$$

e la sua traccia in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ è la retta affine

$$\boxed{r' : a_{12} x + a_{22} y + a_{02} = 0}$$

Pertanto

$$C = r \cap r' : \begin{cases} a_{11} x + a_{12} y + a_{01} = 0 \\ a_{12} x + a_{22} y + a_{02} = 0 \end{cases}$$

sicuramente compatibile con ! intersezione perchè r e r' non parallele visto che $B_1 \neq B_2$

* Se $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ ED C ha sempre coordinate reali perchè $a_{ij} \in \mathbb{R}$.

Dimostriamo che: **Forme canoniche affini** (1)

ogni conica $\gamma \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ (che si suppone a eq. reale se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o se $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato) è affinemente equivalente ad una ed una sola di queste:

(1) Se $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complesso $\exists$ coord. affini (x', y') per cui ogni conica è riconducibile a

(1.a) $(x')^2 + (y')^2 - 1 = 0$ conica non deg. a centro

(1.b) $(x')^2 + (y')^2 = 0$ conica degenere a centro
(due rette incidenti in $O = (0,0)$)
$x' + iy' = 0$ e $x' - iy' = 0$

(1.c) $(y')^2 - x' = 0$ parabola non degenere

(1.d) $(y')^2 - 1 = 0$ parabola semplicemente degenere
(coppia di rette // $y' = \pm 1$)

(1.e) $(y')^2 = 0$ conica doppiamente degenere

(2) In $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato ed in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ $\exists$ (x', y') t.c.

(2.a) $(x')^2 + (y')^2 - 1 = 0$ ellisse non degenere reale (o a punti reali)

(2.b) $(x')^2 + (y')^2 + 1 = 0$ ellisse non degenere immaginaria
(priva di punti reali in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato
vuota in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$)

(2.c) $(x')^2 + (y')^2 = 0$ ellisse semplicemente degenere
(coppia di rette complesse e coniugate
$x' + iy' = 0$ e $x' - iy' = 0$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato
Punti forme in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$

(2.d) $(x')^2-(y')^2-1=0$ iperbole non degenere

(2.e) $(x')^2-(y')^2=0$ iperbole semplicemente degenere
(coppia di rette reali $x'-y'=0$ e $x'+y'=0$ incidenti)

(2.f) $(y')^2-x'=0$ parabole non degenere

(2.g) $(y')^2-1=0$ parabole semplicemente degenere a punti reali o reale
(coppia di rette reali // $y'=\pm 1$)

(2.h) $(y')^2+1=0$ parabole semplicemente degenere immaginaria
(coppia di rette // complesse e coniugate $y'=\pm 1$ su Affine complessificato nota in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$)

(2.i) $(y')^2=0$ Conica doppiamente degenere

Le coniche di ciascuna delle precedenti tipologie sono a 2 a 2 non aff. equivalenti

(2)

~~(2.h) $y'^2 + 1 = 0$ parabola degenere semplicemente vuota in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ a punti immaginari in affine compl (coppia rette // $y' = \pm i$)~~

~~(2.i) $y'^2 = 0$ conica doppiamente degenere~~

~~Le coniche di ciascuno dei gruppi precedenti sono a due a due non affinemente equivalenti.~~

(3)

Oss

* Notiamo che usando $rg(A)$, $rg(A_{00})$ le tipologie (1.d) $\rightarrow$ (1.e) sono tutte non affinemente equiv.

* mentre, usando il fatto che siamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato e in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, ~~se~~ includiamo (come invariante affine anche) le intersezioni con r_∞, cioè $\det(A_{00})$ con segno se $\det(A_{00}) \neq 0$ e i supporti nei casi (2.g) (due rette // reali) e (2.h) (vuota in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ e due rette // complesse)

effettivamente anche le tipologie (2.d) $\rightarrow$ (2.i) sono tutte non affinemente equivalenti.

A

Notiamo che nei casi di coniche a centro cioè

(1.a), (1.b), (2.a), (2.b), (2.c), (2.d), (2.e)

il centro C è $C = O = (0,0)$ ed è centro di simmetria della conica perchè con la sostituzion

$(x,y) \longrightarrow (-x,-y)$

l'equazione della conica rimane invariata

Pertanto, se ad esempio $Supp(\gamma) \neq \emptyset$ è una curva cioè ha infiniti punti, se $P = (x'_0, y'_0) \in \gamma$

$\Rightarrow P' = (-x'_0, y'_0) \in \gamma$ ed è il simmetrico di P rispetto a $C = O$ ⇝ ecco perchè si dicono a centro

* Dobbiamo ora dimostrare che ogni $\gamma \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{K}}$ si può sempre ridurre con un'affinità ad una ed una sola delle equazioni della precedente lista

Classificazione coniche affini doppiamente degeneri

$rg(\Gamma) = rg(\gamma) = 1 \Rightarrow \Gamma = 2\ell$, $\ell \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{K}}$ una retta

Se Γ propria $\Rightarrow \ell \neq r_\infty \Rightarrow$ l'equaz. cartesiana di Γ è della forma

$$\Gamma : (a x_1 + b x_2 + c x_0)^2 = 0$$

Ma allora $\quad \gamma : (ax + by + c)^2 = 0$

esiste sempre un affinità che trasformi

$y' = ax + b + c \quad \rightsquigarrow$ fine! $\boxed{\gamma : (y')^2 = 0}$ doppiamente degenere

Classificazione coniche semplicemente degeneri

$rg(\Gamma) = rg(\gamma) = 2$ e Γ conica propria

$\Rightarrow \Gamma$ semplicemente degenere $\Rightarrow \Gamma = L_1 + L_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$

2 rette, $L_1, L_2 \neq r_\infty$ e $L_1 \neq L_2$, le componenti irriducibili

La traccia $\gamma = \Gamma \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ è composta da due rette affini $\ell_1 = L_1 \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ e $\ell_2 = L_2 \cap \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$

che sono

- incidenti in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow \det(A_{00}) \neq 0$ (2 pti impropri $\neq$)
- parallele in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ $\Leftrightarrow \det(A_{00}) = 0$ (stesso pto improprio

* Se $\gamma \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ avere eq. reale e

a) l_1, l_2 incidenti in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ allora $\det(A_{00}) \neq 0$

punti impropri $\neq$

o le rette sono entrambe reali, si incidono in un punto reale e hanno punti impropri $\neq$ reali

$(\det(A_{00}) < 0) \Rightarrow$

$$l_1: \quad a_1 x + b_1 y + c_1 = 0$$
$$l_2: \quad a_2 x + b_2 y + c_2 = 0 \qquad \text{in } \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$$

$$rg\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} = 2 \qquad \gamma: \ (a_1 x + \dots + c_1) \cdot (a_2 x + \dots + c_2) = 0$$

ed esiste la trasformazione

$$\begin{aligned} x' + y' &= a_1 x + b_1 y + c_1 \\ x' - y' &= a_2 x + b_2 y + c_2 \end{aligned} \rightsquigarrow \text{fornisce affinità reale}$$

che porta γ in $\boxed{(x')^2 - (y')^2 = 0}$ iperbole degenere

oppure le rette sono complesse e coniugate si incidono in un punto reale e hanno punti impropri distinti complessi e coniugati

$$l_1: \quad a x + b y + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$
$$l_2: \quad \bar{a} x + \bar{b} y + \bar{c} = 0$$

$$l_1 + l_2: \quad 2[Re(a) x + Re(b) y + Re(c)] = 0$$

$$l_1 - l_2: \quad 2i[Im(a) x + Im(b) y + Im(c)] = 0$$

è suff. prendere l'affinità reale $\begin{aligned} x' &= Re(a) x + Re(b) y + Re(c) \\ y' &= Im(a) x + Im(b) y + Im(c) \end{aligned}$

per avere

$\ell_1 : \quad x' + i y' = 0$

$\ell_2 : \quad x' - i y' = 0$

e dunque $\quad \gamma : \; x'^2 + y'^2 = 0$ ellisse degenere

Non c'è distinzione se invece sono in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ per le forme normali di f.q. su $\mathbb{C}$ perchè $(x')^2 + (y')^2$ è equivalente a $(x')^2 - (y')^2$ ma trovo solo $\boxed{(x')^2 + (y')^2 = 0}$ Conica degenere a centro

(b) se invece $\ell_1 \parallel \ell_2$ in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ e in tal caso

$\det(A_{00}) = 0$ (stesso punto improprio)

o ℓ_1 e ℓ_2 entrambe reali il punto improprio è reale e hanno infiniti punti reali $\Rightarrow$ esiste sempre affinità reale che porti

ℓ_1 in $\quad y' - 1 = 0$

ℓ_2 in $\quad y' + 1 = 0$ $\quad \Rightarrow \gamma$ in $\boxed{(y')^2 - 1 = 0}$ parabola semplic. degenere reale

o ℓ_1 e ℓ_2 complesse e coniugate $\Rightarrow$

il punto improprio e quindi la giacitura è reale, ℓ_1 e ℓ_2 non hanno punti propri reali

$\Rightarrow \quad \ell_1 : \; ax + by + c = 0 \qquad a, b \in \mathbb{R}$

$\qquad \ell_2 : \; ax + by + \bar{c} = 0 \qquad c, \bar{c} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$

D'apprima $\exists$ un camb. affine reale $(x, y) \to (\omega, z)$ t.c. $\quad z = ax + by$

e così in (ω, z) $\qquad \ell_1 : \; z + c = 0$

$\qquad \ell_2 : \; z - \bar{c} = 0$

Se poi considero un cambiamento affine reale

$(\cancel{x},\cancel{z}) \longrightarrow (\cancel{v},w)$ t.c. $\quad z = w + Re(c)$

$l_1: \ w + i\,Im(c) = 0$
$l_2: \ w - i\,Im(c) = 0$

Ma allora basta prendere (x', y') t.c.

$y' = \frac{1}{Im(c)} w$ cosicché

$l_1: \ y' + i = 0$
$l_2: \ y' - i = 0$ $\quad \Rightarrow \quad \boxed{\gamma: (y')^2 + 1 = 0}$ parabola sempl. deg. immaginaria

* Non c'è distinzione dei due casi se sono in A_4^2 complesso trovo solo $\boxed{(y')^2 - 1 = 0}$ parabola semplic. degenere

Ci mancano dunque le coniche affini non degeneri

$$\gamma: \ f(x,y) = \underbrace{f_2(x,y)}_{\text{f.q. associata a } \gamma} + \underbrace{f_1(x,y)}_{\text{formal lineare}} + \underbrace{f_0(x,y)}_{\text{termine noto} = a_{00}} = 0$$

$rg(T') = rg(\gamma) = 3 = rg(A)$

$$rg(A_{00}) = \begin{cases} 2 & \text{conica a centro} \\ 1 & \text{parabola} \end{cases}$$

Per la teoria delle f.q. $\Rightarrow \exists$ sempre $\binom{z}{w} = M \binom{x}{y}$

con $M \in GL(2, \mathbb{K})$ t.c.

$f_2(z,w) = (z \ w)\, B_{00} \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ è t.c.

$B_{00} = {}^t M_{00} A_{00} M_{00}$ è diagonale

con

$D_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ per forme normali su $\mathbb{C}$

$\downarrow$ $rg(A_{00}) = 1$ $\quad\downarrow$ $rg(A_{00}) = 2$

Se siamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato o in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$,

per Sylvester

$D_{00} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ o $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

$\updownarrow$ $rg(A_{00}) = 1$

$\updownarrow$ $rg(A_{00}) = 2$, $\det(A_{00}) > 0$

$\updownarrow$ $rg(A_{00}) = 2$, $\det(A_{00}) < 0$

e in tali casi l'affinità lineare è reale

Nel riferimento (z,w) γ diventa

$f(z,w) =$

$\nearrow$ $w^2 + \hat{f}_1(z,w) + \hat{f}_0 = \boxed{w^2 + 2bz + 2cw + d}$ se $rg(D_{00}) = 1$

$\searrow$ $z^2 + w^2 + \hat{f}_1(z,w) + \hat{f}_0 = \boxed{z^2 + w^2 + 2bz + 2cw + d}$ se $rg(A_{00}) = 2$ e siamo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complesso oppure $\det(A_{00}) > 0$ nel caso complessificato o reale

$\downarrow$ $z^2 - w^2 + \hat{f}_1(z,w) + \hat{f}_0 = \boxed{z^2 - w^2 + 2bz + 2cw + d}$ se $rg(A_{00}) = 2$ e necessariamente $\det(A_{00}) < 0$ nel caso reale o complessificato

Def. 8.4.3

Data $\gamma \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ conica non-degenere

Sia $\Gamma \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ il suo completamento proiettivo

* Se γ era parabola $\Rightarrow$ Γ è tangente a $x_0 = 0$ nel punto improprio di γ

* Se invece γ è a centro $\Rightarrow$ Γ ha due punti di intersezione $\neq$ su $x_0 = 0$ (punti impropri di γ) siano B_1 e B_2

Consideriamo le rette tangenti a Γ in questi punti B_1 e B_2, $T_{B_1}(\Gamma) = \omega_{B_1}$ e $T_{B_2}(\Gamma) = \omega_{B_2}$ polari di B_1 e B_2 entrambe $\neq \{x_0 = 0\}$

le tracce in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ di queste rette sono dette **asintoti di γ**

$B_i = [0, l_i, m_i] \Rightarrow T_{B_i}(\Gamma): (0\ l_i\ m_i) A \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 0$

$\Rightarrow$ asintoti di γ $\boxed{(0\ l_i\ m_i) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0}$

* Se prendiamo un punto

$$P \in \{x_0 = 0\} \setminus (\Gamma \cap \{x_0 = 0\})$$

cioè improprio per $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ non per Γ

ω_P = retta polare rispetto a Γ del polo P

è una retta $\neq \{x_0 = 0\} \to$ la sua traccia è una retta affine detta **diametro di γ associato alla direzione data da $P = [0, l, m]$**

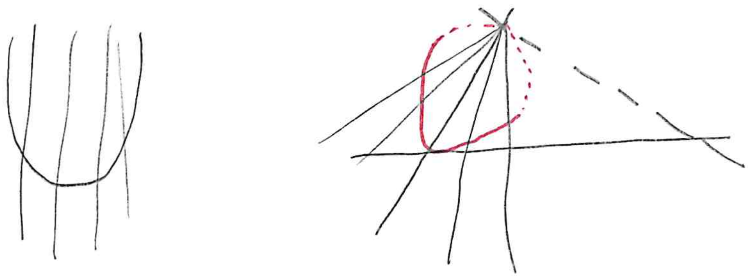
Se $P = [0, l, m]$ il diametro a lui associato è

$$\boxed{(0\ l\ m) A \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = 0}$$

Se γ è una parabola $\Rightarrow$ non ha asintoti

inoltre poiché $\{x_0=0\}$ è tg. nel suo punto improprio, quindi è la polare di T nel suo punto improprio

$\Rightarrow$ i poli dei diametri di una parabola sono sulla polare del punto improprio di γ quindi, per polarità, i diametri passano tutti per il punto improprio di γ (cioè sono tutte rette di $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ parallele che incontrano γ solo in un punto proprio)



Se γ è a centro essendo gli asintoti le "rette polari" di γ rispetto ai suoi punti impropri, tutti i diametri come già fanno ω_{v_1} e ω_{v_2}, $\begin{matrix} v_1=[0,1,0] \\ v_2=[0,0,1] \end{matrix} \in r_\infty$ passano per il centro C di γ

In altre parole i diametri di una conica a centro sono tutte le rette affini del fascio di rette di centro C

Classificazione affine parabole non degeneri

Dalla teoria f.q. $\exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ affinità lineare t.c.

$$\gamma : f(z,w) = w^2 + 2bz + 2cw + d = 0 \quad \text{con}$$

$$B = \begin{pmatrix} d & b & c \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{con } \det(B) = 1 \cdot b^2 \neq 0 \Rightarrow b \neq 0$$

$\boxed{\text{Se } c = 0}$ $\gamma : w^2 + 2bz + d = 0$ e posso considerare $\forall d$ con affinità $\begin{cases} w = v \\ z = u - \frac{d}{b} \end{cases}$ di modo che trovare

$$\gamma : f(u, v) = v^2 + 2bu = 0$$

Significato geometrico

Nelle coordinate (z, w) il diametro di γ per O era $w = 0$ che intersecava γ in $\left(-\frac{d}{2b}, 0\right)$

la polare di γ rispetto a O era la retta

$$(1 \;\; 0 \;\; 0) \begin{pmatrix} d & b & 0 \\ b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ w \end{pmatrix} = 0 = d + bz$$

ho compiuto traslazione in modo tale che il diametro sia $v = 0$ e intersechi γ in $(0,0)$ e la tg. a γ in O è la polare di γ rispetto a O che è $u = 0$

Ponendo infine $p = -b \Rightarrow v^2 - 2pu = 0$

e con $\begin{cases} x' = 2pu \\ y' = v \end{cases}$ mi riduco a $\boxed{(y')^2 - x' = 0}$ parabola non degenere

$\boxed{\text{Se } c \neq 0}$ ponendo $\begin{cases} z = u \\ w = v - c \end{cases}$ si ha $(v-c)^2 + 2bu + 2c(v-c) + d = ($

$$v^2 - \cancel{2cv} + c^2 + 2bu + \cancel{2cv} - 2c^2 + d = 0$$

$$v^2 + 2bu + (d - c^2) = 0$$

e sono come nel caso precedente.

La trattazione rispetta la struttura che si vuole su $\mathbb{A}^2$ → complesso / complessificato / reale

* Classificazioni coniche a centro non-degeneri

Nel caso $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complesso abbiamo solamente

$$f(z,w) = z^2 + w^2 + 2bz + 2cw + d = 0$$

altrimenti in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato od in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ per Sylvester questo è solo uno dei 2 possibili casi.

(segnatura $(2,0)$ o $(0,2)$ per B_{00} oppure $(1,1)$ per B_{00})

In tale riferimento la matrice di γ è

$$B = \begin{pmatrix} d & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

il centro è $\begin{cases} 1x + 0y + b = 0 \\ 0x + 1y + c = 0 \end{cases}$ cioè $C = (-b, -c)$

Se prendiamo $\begin{cases} u = z + b \\ v = w + c \end{cases}$ il centro nelle coord (u,v) diventa O e γ ha equazioni

$$f(u,v) = (u-b)^2 + (v-c)^2 + 2b(u-b) + 2c(v-c) + d = 0$$
$$= u^2 + v^2 + (d - b^2 - c^2) = 0$$

Geometricamente ho spostato il centro C in O

Se sono su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complesso $\begin{cases} x' = \dfrac{u}{\sqrt{d - b^2 - c^2}} \\ y' = \dfrac{u}{\sqrt{d - b^2 - c^2}} \end{cases}$ e dividendo $f(u,v)$

per $(d-b^2-c^2)$, si ottiene

$$\boxed{f(x',y') = (x')^2+(y')^2+1=0}$$ conica non degenere a centro

Se invece sono su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato o su $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$,

Se $d-b^2-c^2>0$ faccio come prima e trovo

$$\boxed{(x')^2+(y')^2+1=0}$$ ellisse immaginaria o senza punti reali

Se $d-b^2-c^2<0$ siccome sono ammesse solo affinità reali

$$x' = \frac{u}{\sqrt{|d-b^2-c^2|}} \qquad y' = \frac{v}{\sqrt{|d-b^2-c^2|}}$$ e si ottiene

$$-(x')^2-(y')^2+1=0 \quad \text{cioè} \quad \boxed{(x')^2+(y')^2-1=0}$$

ellisse reale o a punti reali

Infine, solo in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{C}}$ complessificato o in $\mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$, per Sylvester si arriva alla forma

$$z^2-w^2+2bz+2cw+d=0$$

$$B = \begin{pmatrix} d & b & c \\ b & 1 & 0 \\ c & 0 & -1 \end{pmatrix}$$ il centro è $C = \begin{cases} +z+b=0 \\ -w+c=0 \end{cases}$

cioè $C=(-b,+c)$ come prima $\begin{cases} u = z+b \\ v = w-c \end{cases}$

fornisce $u^2 - v^2 + d + c^2 - b^2 = 0$

Scriviamo

$$u^2 - v^2 - (b^2 - c^2 - d) = 0$$

e dividiamo per $(b^2 - c^2 - d)$ $\rightarrow$

$$\frac{u^2}{b^2-c^2-d} - \frac{v^2}{b^2-c^2-d} - 1 = 0$$

Se $b^2 - c^2 - d > 0$

$$\begin{cases} x' = \dfrac{u}{\sqrt{b^2-c^2-d}} \\ y' = \dfrac{v}{\sqrt{b^2-c^2-d}} \end{cases}$$

la riduce a $(x')^2 - (y')^2 - 1 = 0$

Se $b^2 - c^2 - d < 0$ $\Rightarrow$ $d + c^2 - b^2 > 0$ e

Scriviamo

$$-\frac{u^2}{d+c^2-b^2} + \frac{v^2}{d+c^2-b^2} - 1$$

Ponendo
$$x' = \frac{v}{\sqrt{d+c^2-b^2}}$$
$$y' = \frac{u}{\sqrt{d+c^2-b^2}}$$
si ottiene di nuovo

$$(x')^2 - (y')^2 = 1$$

$\blacksquare$

Riassumendo

Una conica reale non degenere a centro di matrice A si dice ellisse se i suoi punti impropri sono complessi e coniugati cioè $\Leftrightarrow$ $\det(A_{00}) > 0$ $\Leftrightarrow$ il luogo dei punti reali non interseca r_∞

Un'ellisse è

a punti reali $\Leftrightarrow$ la f.c. affine è $(x')^2+(y')^2-1=0$

$\Leftrightarrow$ la chiusura proiettiva è $-(X_0')^2+(X_1')^2+(X_2')^2=0$

a punti immaginari $\Leftrightarrow$ f.c. affine $(x')^2+(y')^2+1=0$

$\Leftrightarrow$ la chiusura proiettiva è $(X_0')^2+(X_1')^2+(X_2')^2=0$

Il criterio di Sylvester descriveva quando una f.q. era <u>definita positiva</u>

$$\alpha_{11}>0 \qquad \alpha_{22}>0 \qquad \alpha_{33}>0$$

<u>definita negativa</u>

$$\alpha_{11}<0 \qquad \alpha_{22}>0 \qquad \alpha_{33}<0$$

In entrambi i casi

$$\alpha_{11}\cdot\alpha_{33}>0$$

Ma allora se A è una matrice simmetrica di un ellisse ($\Leftrightarrow \det(A)\neq 0, \det(A_{00})>0$)

$$\alpha_{11}=a_{00} \qquad \alpha_{33}=\det(A)$$

l'ellisse è a punti immaginari $\Leftrightarrow a_{00}\cdot\det(A)>0$

" a punti reali $\Leftrightarrow a_{00}\det(A)<0$

Gli asintoti di un ellisse sono immaginari e rette coniugate e si incontrano nel centro che è reale)

Invece γ reale non degenere è iperbole (17)
se i suoi punti impropri sono una coppia
di punti reali $\Leftrightarrow \det(A_{00}) < 0$

Gli asintoti di un'iperbole sono rette reali
e si intersecano nel centro. Non intersecano
la conica γ in punti propri, perché sono
rette tangenti a Γ nei punti impropri di γ
Queste sono le uniche rette del fascio di
rette per il centro C con tale proprietà

8.5 Classificazione metrica delle coniche euclidee reali (1)

D'ora in poi $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, consideriamo $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ piano euclideo e solo isometrie cioè trasformazioni di coordinate

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

con $M \in O(2, \mathbb{R})$ cioè t.c. $M^t M = I_2$.

Tutte le notazioni utilizzate nel caso affine

$$\tilde{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c_1 & & \\ c_2 & & M \end{pmatrix}$$

$$B = \tilde{M}^t A \tilde{M} \qquad B_{00} = M^t A_{00} M$$

continuano a sussistere e hanno senso anche in questo ambito, come invarianti metrici (cioè validi a meno di isometrie)

$$rg(A), \ rg(A_{00}), \ \det(A_{00}) > 0 \ \text{e} \ \det(A_{00}) < 0$$

e quindi hanno senso i concetti di

conica a centro, di parabole, di ellisse e di iperbole

$\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ sarà il completamento proiettivo di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ dove utilizzeremo proiettività della forma

$$\rho \underline{X} = \tilde{M} \underline{y} \quad \text{con } \tilde{M} \text{ come sopra}$$

cioè fissamo r_∞ (retta $\{x_0 = 0\}$) e $M \in O(2, \mathbb{R})$.

Oss se si hanno 2 rette in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ che sono ortogonali, di vettori direttori

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{v}' = \begin{pmatrix} l' \\ m' \end{pmatrix}$$

si ha allora $l l' + m m' = 0 \iff \underline{v} = \begin{pmatrix} l \\ m \end{pmatrix}$ e $\underline{v}' = \begin{pmatrix} m \\ -l \end{pmatrix}$

L'ortogonalità si può rileggere in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ in questo modo

$[0, l, m]$ e $[0, m, -l]$ punti impropri

essi provengono da due direzioni che in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ vediamo ortogonali

Se prendiamo in $x_0 = 0$ la conica Assoluto $x_1^2 + x_2^2 = 0$, ~~essa~~ nella retta proiettiva ha matrice simmetrica $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$

Se $P = \underset{\text{visto in } \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}}{[0, l, m]} = \underset{\text{visto in } \{x_0 = 0\} \cong \mathbb{P}^1_{\mathbb{R}}}{[l, m]}$, il coniugato rispetto all'assoluto

di P è $\quad P' = [m, -l] = [0, m, -l]$

cioè due direzioni di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ sono ortogonali $\iff$ i corrispondenti punti impropri sono coniugati rispetto all'assoluto su $r_\infty = \{x_0 = 0\}$

Ripercorriamo le strategie affini per vedere se e cosa sopravvive nel caso metrico

γ doppiamente degenere $\Rightarrow \quad \gamma : (ax + by + c)^2 = 0$

$\exists$ sempre un'isometria che porta $ax + by + c = 0$ in $y' = 0$ in un riferimento ortogonale per $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$

$\Rightarrow \boxed{(y')^2 = 0}$ sarà la forma canonica metrica in questo riferimento

Semplicemente degeneri

$rg(\gamma) = rg(\Gamma') = 2$ con Γ' conica proiettiva propria.

* Se $\Gamma' = L_1 + L_2 \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ con $L_1 \neq L_2$ e $L_i \neq r_\infty$ $1 \le i \le 2$

$\Rightarrow$ $\gamma = \Gamma' \cap \mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ è costituita da 2 rette reali che possono essere o incidenti o parallele

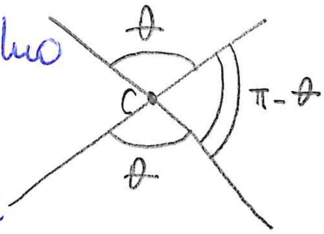
- **Se sono parallele** si prende la parallela ℓ equidistante da entrambe e poi si determina l'isometria che porta ℓ nell'asse x' (cioè $y'=0$) dintale riferimento, posta $a = d(\ell, \ell_1) = d(\ell, \ell_2) > 0$, si avrà

$$\ell_1 \quad y' - a = 0$$
$$\ell_2 \quad y' + a = 0$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\gamma : (y')^2 - a^2 = 0 \quad a > 0}$

parabole degenere a punti reali

- **Se sono incidenti** preso θ l'angolo convesso tra ℓ_1 e ℓ_2 $\Rightarrow$ $\pi - \theta$ è l'angolo residuo

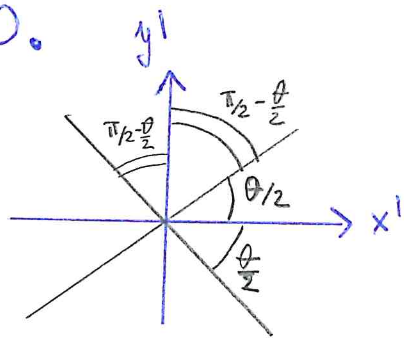


Le bisettrici dei due angoli passanti per il centro $C = \ell_1 \cap \ell_2$ sono due rette ortogonali e, mediante un'isometria possono considerarsi assi di un riferimento ortonormale (x', y') con C che diventa O.

In questo riferimento

ℓ_1: $y' + mx' = 0$ $m > 0$

ℓ_2: $y' - mx' = 0$



Ponendo $x' + \frac{1}{m} y' = 0$ $\quad x' - \frac{1}{m} y' = 0$

$$\Rightarrow \gamma : \boxed{(x')^2 - \frac{1}{m^2}(y')^2 = 0 \, , \, m > 0}$$ iperbole degenere

* Sia invece $T' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}}$ punti forme cioè $\operatorname{Supp}(T') = \{P\}$ reale

$\Rightarrow T' \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ è t.c. $T' = L_1 + L_2$ rette complesse

che sono incidenti in un punto reale

- Se il punto reale è su r_∞ $\Rightarrow$ L_1, L_2 hanno lo stesso punto improprio $\Rightarrow$ in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ γ è vuota ma la giacitura è reale e le 2 rette complessivamente fattorizzano su $\mathbb{C}$ il polinomio omogeneo di γ in

$$(ax + by + c)(ax + by + \bar{c}) = 0 \qquad \begin{matrix} a, b \in \mathbb{R} \\ c, \bar{c} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \end{matrix}$$

e $P = [0, b, -a]$, cioè $\underline{v} = (b, -a)$

Prendo $\frac{\underline{v}}{\|\underline{v}\|} = \underline{f} = \begin{pmatrix} \frac{b}{\|\underline{v}\|} \\ -\frac{a}{\|\underline{v}\|} \end{pmatrix}$ versore direttore della giacitura

$\Rightarrow \exists$ sempre un'isometria lineare in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ che manda $\underline{f}$ in $\underline{e}_2$ cosicché nelle nuove coordinate (z, w) si ha

$$(w + c) \cdot (w + \bar{c}) = 0 \quad \Rightarrow$$

$$w^2 + (\bar{c} + c) w + c\bar{c} = 0 \iff w^2 + \operatorname{Re}(c) w + d = 0$$

dove $d = c \cdot \bar{c} = \|c\| > 0$

$w = y' + \alpha$ traslazione t.c.

$$(y')^2 + 2\alpha y' + \operatorname{Re}(c) y' + \operatorname{Re}(c)\alpha + d = 0$$

$$(y')^2 + y'(2\alpha + \operatorname{Re}(c)) + \operatorname{Re}(c)\alpha + d = 0$$

Se $\alpha = -\frac{\operatorname{Re}(c)}{2}$ $\Rightarrow (y')^2 + c \cdot \bar{c} - \frac{\operatorname{Re}(c)^2}{2} = 0$

Poichè $c\bar{c} = Re(c)^2 + Im(c)^2 \Rightarrow c\bar{c} - \frac{Re(c)^2}{2} = k^2 > 0$

$$\Rightarrow \boxed{(y')^2 + k^2 = 0, \; k > 0}$$ parabole semplicemente degeneri a punti immaginari

- Se il punto reale è in $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$ le rette sono complesse e coniugate con giaciture immaginarie e si incontrano nel punto reale $\Rightarrow$ i punti impropri sono immaginari coniugati $\Rightarrow \det(A_{00}) > 0$ cioè γ è un'ellisse degenere puntiforme

Per il teorema spettrale degli operatori autoaggiunti $\Rightarrow \exists\, M \in O(2,\mathbb{R})$ t.c. $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$ percui $B_{00} = M^t A_{00} M$ è diagonale

poichè $\det(B_{00}) = \det(A_{00}) \cdot \det(M)^2 = \det(A_{00})$, $\det(M) = \pm 1$
$\Rightarrow$ gli autovalori di A_{00} sono concordi e, a meno di moltiplicare per -1 la nuova equazione, si possono supporre entrambi positivi quindi si ha:

$$\beta_1^2 z^2 + \beta_2^2 w^2 + 2 b_{01} z + 2 b_{02} w + b_{00} = 0$$

e $B = \begin{pmatrix} b_{00} & b_{01} & b_{02} \\ b_{01} & \beta_1^2 & 0 \\ b_{02} & 0 & \beta_2^2 \end{pmatrix}$. Poichè $rg(B) = 2 \Rightarrow$

la I riga è combinazione lineare di II e III riga

$$b_{01} = t\beta_1^2 \qquad b_{02} = s\beta_2^2 \, , \quad t, s \in \mathbb{R} \text{ e}$$

$$b_{00} = t\beta_1^2 + s\beta_2^2$$

$$B = \begin{pmatrix} t\beta_1^2 + s\beta_2^2 & t\beta_1^2 & s\beta_2^2 \\ t\beta_1^2 & \beta_1^2 & 0 \\ s\beta_2^2 & 0 & \beta_2^2 \end{pmatrix} \Rightarrow \beta_1^2 z^2 + \beta_2^2 w^2 + 2t\beta_1^2 z + 2s\beta_2^2 w + t\beta_1^2 + s\beta_2^2 = 0$$

Operando un'opportuna traslazione

$$z = x' - t$$
$$w = y' - s$$

si ottiene

$$\beta_1^2 (x')^2 + \beta_2^2 (y')^2 = 0 \Longrightarrow (x')^2 + \frac{(y')^2}{\left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)^2} = 0$$

ponendo $\frac{\beta_1}{\beta_2} = k$ è $\boxed{(x')^2 + \frac{y'^2}{k^2}, \quad k>0}$ ellisse degenere puntiforme

- Siccome in $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, $\Gamma' = \overline{\gamma}$ è semplicemente degenere $\Longrightarrow \Gamma' = L_1 + L_2$ sono per forza due rette complesse e coniugate perché l'equazione di γ e quindi di Γ' è reale $\Rightarrow$ abbiamo considerato tutte le possibilità.

Classificazione coniche euclidee non degeneri

$\det(A) \neq 0$

* Se $\det(A_{00}) = 0$ $\Rightarrow \gamma$ è una parabola

Per teorema spettrale operatori autoaggiunti, $\exists$ isometria

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \quad t.c.$$

$$B_{00} = {}^tM A_{00} M = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \text{ e nelle coord. } (z,w)$$

$$\gamma: \quad \alpha w^2 + 2 b_{01} z + 2 b_{02} w + b_{00} = 0$$

e a meno di moltiplicare per -1 si può supporre $\alpha = \beta^2 > 0$

$$\gamma: \quad \beta^2 w^2 + 2 b_{01} z + 2 b_{02} w + b_{00} = 0$$

Con la traslazione

$$\begin{cases} W = v - \dfrac{b_{02}}{\beta^2} \\ z = u - \dfrac{b_{00} + 2b_{02}\left(\frac{b_{02}}{\beta^2}\right) - \beta^2\left(\frac{b_{02}}{\beta^2}\right)^2}{2b_{01}} = u - \dfrac{b_{00} + \frac{b_{02}}{\beta^2}}{2b_{01}} \end{cases}$$

Si arriva a

$$\beta^2 v^2 + 2b_{01} u = 0$$

cioè

$$v^2 + \frac{2b_{01}}{\beta^2} u$$

Se $\frac{b_{01}}{\beta^2} < 0$, poniamo $p := -\frac{b_{01}}{\beta^2} > 0$

e con $y' = v$, $x' = u$ arriviamo a $\boxed{(y')^2 - 2px = 0 \text{ con } p > 0}$

parabola non degenere

Se $\frac{b_{01}}{\beta^2} > 0$ prendiamo

$x' = -u$, $y' = v$ e ci riconduciamo al caso precedente.

* Se $\det(A_{00}) > 0$ ellisse generale

- Con il teorema spettrale $\Rightarrow$ diagonalizzo A_{00}
  $\Rightarrow$ autovalori concordi $\Rightarrow$ a meno di moltiplicare per -1 posso supporli entrambi positivi
- con traslazioni elimino i termini lineari
- si arriva ad un'equazione della forma

$$\beta_1^2 (x')^2 + \beta_2^2 (y')^2 + d = 0$$

Se $d>0$ dividendo per $d=\gamma^2$ si scrive come

$$\frac{(x')^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta_1}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta_2}\right)^2}+1=0$$

Ponendo $a=\frac{\gamma}{\alpha_1}$ e $b=\frac{\gamma}{\alpha_2}$

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2}+\frac{(y')^2}{b^2}=-1}$$

ellisse non degenere a punti immaginari (o conica vuota)

A meno di una simmetria, si può sempre assumere $a \geq b > 0$

$$\begin{cases} x''=y' \\ y''=x' \end{cases}$$

se $d<0$ $\Rightarrow d=-\gamma^2 \Rightarrow$ divido per γ^2

$$\boxed{\frac{(x')^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta_1}\right)^2}+\frac{(y')^2}{\left(\frac{\gamma}{\beta_2}\right)^2}=1}$$

ellisse non degenere a punti reali

Come prima, a meno di una simmetria si può sempre supporre che $a:=\frac{\gamma}{\alpha_1} \geq b:=\frac{\gamma}{\alpha_2}$.

* L'ultimo caso è quello con $\det(A_{00})<0$ $\Rightarrow \gamma$ iperbole non degenere $\Rightarrow$ col thm spettrale diagonalizziamo A_{00} $\Rightarrow$ ho 2 autovalori discordi $\Rightarrow$ a meno di moltiplicare per -1, posso ricondurmi a

$$\beta_1^2 z^2-\beta_2^2 w^2+2b_{01}z+2b_{01}w+b_{00}=0$$

Con solite traslazioni, annullo i termini lineari e mi riconduco ad un'equazione della forma

$$\beta_1^2 u^2 - \beta_2^2 v^2 + d = 0$$

Se $d < 0$ $\Rightarrow d = -\gamma^2 \Rightarrow$ divido per γ^2 e ponendo $a = \frac{\gamma}{\beta_1}$, $b = \frac{\gamma}{\beta_2}$

trovo con $u = x'$ e $v = y'$

$$\boxed{\frac{(x')^2}{a^2} - \frac{(y')^2}{b^2} = 1}$$ iperbole generale

Se $d > 0$ moltiplico per -1 così $-d < 0 \Rightarrow -d = -\gamma^2$

$$-\beta_1^2 u^2 + \beta_2^2 v^2 - \gamma^2 = 0$$

Con la simmetria lineare $v = x'$ e $u = y'$ mi riduco a

$$\beta_2^2 (x')^2 - \beta_1^2 (y')^2 - \gamma^2 = 0$$ e sono nel caso precedente.

Tutte le coniche euclidee considerate non sono isometriche l'una con l'altra sia

- nelle diverse tipologie (che non sono nemmeno aff. equiv.)
- ma all'interno di una medesima tipologia, parametri $a \geq b > 0$ o $a > 0$, $b > 0$ o $k > 0$ o $m > 0$ ecc. differenti danno coniche aff. equiv. ma non congruenti

Queste sono tutte e sole le forme canoniche metriche delle coniche di $\mathbb{E}^2_{\mathbb{R}}$

(10)

Lemma 8.5.4. *Una conica a centro γ ha almeno una coppia di assi di simmetria tra loro ortogonali. Se (8.12) è una equazione che rappresenta la conica e la matrice $\mathbf{A}_{33}$ ha due autovalori distinti λ_1 e λ_2, allora gli assi di simmetria sono paralleli, rispettivamente, alle rette di equazione*

$$(a-\lambda_1)x+by=0 \quad \text{e} \quad (a-\lambda_2)x+by=0$$

(le cui direzioni corrispondono agli autospazi di $\mathbf{A}_{33}$ di autovalore λ_1 e λ_2).

Se (λ,μ) è un autovettore di $\mathbf{A}_{33}$, la retta polare di $[\lambda,\mu,0]$, di equazione $(a\lambda+b\mu)x+(b\lambda+c\mu)y+(d\lambda+e\mu)=0$.

Se la matrice $\mathbf{A}_{33}$ ha un unico autovalore, la conica a centro è una circonferenza e tutti i diametri sono assi di simmetria; in tal caso, basta prendere una coppia di diametri tra loro ortogonali.

Si rimanda al Problema 8.34 per un esempio di calcolo di assi di simmetria di coniche a centro.

8.6 Invarianti ed equazione canonica metrica di una conica reale

Sia $(1,x,y)\mathbf{A}\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=0$ l'equazione di una conica reale $\mathbf{\Gamma}$. Si denoti con $\mathbf{A}_{33}$ la sottomatrice di $\mathbf{A}$ ottenuta cancellando l'ultima e l'ultima colonna; $\mathbf{A}_{33}$ è la matrice della intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria, nel riferimento associato. Con A_{33} o $|\mathbf{A}_{33}|$ si denota invece il determinante della matrice $\mathbf{A}_{33}$.

Osservazione 8.6.1. *det $\mathbf{A}$, det $\mathbf{A}_{33}$ e la traccia di $\mathbf{A}_{33}$ sono invarianti metrici di $\mathbf{\Gamma}$, cioè sono costanti per cambiamenti di riferimento ortonormale.* Infatti, le formule di cambiamento di riferimento ortogonale sono:

$$\begin{aligned} x &= m_{11}x'+m_{12}y'+d_1 \\ y &= m_{21}x'+m_{22}y'+d_2 \end{aligned} \tag{8.18}$$

che possono essere scritte come

$$\begin{pmatrix}1\\x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\d_1&m_{11}&m_{12}\\d_2&m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix} \tag{8.19}$$

con $\tilde{\mathbf{M}}=\begin{pmatrix}m_{11}&m_{12}\\m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}$ matrice ortogonale. Si osservi, in particolare, che la matrice $\mathbf{M}=\begin{pmatrix}1&0&0\\d_1&m_{11}&m_{12}\\d_2&m_{21}&m_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\x'\\y'\end{pmatrix}$ ha determinante uguale a ±1. Cambiando riferimento, la matrice associata alla conica è $\mathbf{A}'=\mathbf{M}^t\mathbf{A}\mathbf{M}$ e, in particolare, $\mathbf{A}$ e $\mathbf{A}'$ hanno lo stesso determinante. Inoltre, la sottomatrice di $\mathbf{A}'$ ottenuta cancellando la prima riga e la prima colonna è $\mathbf{A}'_{33}=\tilde{\mathbf{M}}^t\mathbf{A}_{33}\tilde{\mathbf{M}}=\tilde{\mathbf{M}}^{-1}\mathbf{A}_{33}\tilde{\mathbf{M}}$ ($\tilde{\mathbf{M}}^t=\tilde{\mathbf{M}}^{-1}$ perché $\tilde{\mathbf{M}}$ è ortogonale). La tesi segue, osservando che, allora, $\mathbf{A}'_{33}$ e $\mathbf{A}_{33}$ hanno lo stesso polinomio caratteristico, i cui coefficienti sono il determinante e la traccia della matrice.

11

Esempio 8.6.2. Ogni parabola Γ ammette una equazione della forma $ay^2 = 2qx$ o anche

$$y^2 = 2px \qquad con\, p = (q/a) > 0$$

detta *equazione canonica metrica*; i coefficienti a e q possono essere determinati nel modo seguente:

$$tr\,\mathbf{A}_{00} = a$$

$$det\,\mathbf{A} = det\begin{pmatrix} 0 & -q & 0 \\ -q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} = -aq^2 \qquad (8.20)$$

$$q = \sqrt{-\frac{det\mathbf{A}}{tr\mathbf{A}_{00}}}.$$

Si rimanda al Problema 8.32 per un esempio numerico.

Esempio 8.6.3. Ogni conica a centro Γ ammette una equazione della forma $ax^2+by^2+c = 0$. Osservando che:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} c & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

$$det\,\mathbf{A} = a\,b\,c$$

$$det\,A_{00} = a\,b$$

$$tr\,A_{00} = a + b;$$

si vede facilmente che a e b *sono gli autovalori di* $\mathbf{A}$ e $c = \frac{det\mathbf{A}}{det\mathbf{A}}$.

Osserviamo che è sempre possibile supporre che $|a| < |b|$. L'equazione

$$(a/c)x^2 + (b/c)y^2 + 1 = 0$$

è detta l'*equazione canonica metrica della conica a centro.*
Discutiamo ora quali casi si presentano, a partire dalla classificazione affine.
i) **Ellisse immaginaria**: $0 < (a/c) < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} + 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

ii) **Ellisse a punti reali**: $(a/c) \leq (b/c) < 0$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = -c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha \geq \beta.$$

Osserviamo che l'intersezione di Γ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$: Il valore α è detto *semiasse maggiore.* L'intersezione di Γ con $x = 0$ è data dai punti $(0, \beta)$ e $(0, -\beta)$: Il val ore β è detto *semiasse minore.* Nel primo quadrante, i punti reali di Γ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{\alpha^2 - x^2}$ (per $0 \leq x \leq \alpha$): maggiore è il rapporto β/α e "più schiacciata" risulterà l'ellisse.

Se $\alpha = \beta$, la conica è una circonferenza.

12

iii) **Iperbole**: $(a/c) < 0 < (b/c)$. Possiamo fissare α con $\alpha^2 = -c/a$ e β con $\beta^2 = c/b$, e scrivere l'equazione come

$$\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0 \qquad \alpha > \beta.$$

L'asse x è detto *asse trasverso*, mentre l'asse y (che non interseca l'iperbole in punti reali) è detto *asse non trasverso.*

Osserviamo che l'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $y = 0$ è data dai punti $(\alpha, 0)$ e $(-\alpha, 0)$. L'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con $x = x_0$ non ha punti reali per $x_0 < \alpha$. Nel primo quadrante, i punti reali di $\mathbf{\Gamma}$ formano il grafico della funzione $x \mapsto (\beta/\alpha)\sqrt{x^2 - \alpha^2}$ (per $x \geq \alpha$). Gli asintoti hanno equazione $y = \pm\frac{\beta}{\alpha}x$. Al crescere dell'ascissa, tende a zero la distanza tra i punti nel primo quadrante aventi la stessa ascissa e appartenenti all'iperbole o all'asintoto.

Si rimanda ai Problemi 8.30-8.31 per esempi relativi alla classificazione metrica.

Definizione 8.6.4. Un *fuoco F* di una conica non degenere $\mathbf{\Gamma}$ è un punto proprio tale che le tangenti a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da F sono rette isotrope.

Se F è un fuoco per $\mathbf{\Gamma}$, l'involuzione indotta sul fascio di rette per F dall'intersezione di $\mathbf{\Gamma}$ con la retta impropria coincide con l'involuzione indotta dall'assoluto.

Un fuoco è intersezione di due tangenti proprie a $\mathbf{\Gamma}$ uscenti da punti ciclici. Dunque, una conica non degenere ha al massimo 4 fuochi.

Osservazione 8.6.5. Una parabola ha un unico fuoco. In un riferimento in cui la parabola ha equazione canonica metrica $x^2 = 2py$, il fuoco ha coordinate $F(0, \frac{p}{2})$. La sua polare, la retta di equazione $y = -\frac{p}{2}$, è detta la *direttrice* della parabola ed è indicata con la lettera d. Si dimostra facilmente che *la parabola $x^2 = 2py$ è il luogo dei punti del piano equidistanti da F e da d.* In particolare, p è la distanza del fuoco dalla direttrice della parabola.

Osservazione 8.6.6. Una ellisse a punti reali (che non sia una circonferenza) ha due fuochi reali. In un riferimento in cui l'ellisse assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse maggiore. I punti reali della ellisse sono caratterizzati dalla proprietà che la somma delle distanze da due fuochi reali sia costante.

Osservazione 8.6.7. Una iperbole ha due fuochi reali e due fuochi immaginari coniugati. In un riferimento in cui l'iperbole assume l'equazione canonica metrica $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{\beta^2} - 1 = 0$, i fuochi reali sono i punti $F_1(\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$ e $F_2(-\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, 0)$, appartenenti all'asse trasverso, mentre i rimanenti fuochi $(0, \pm i\sqrt{\alpha^2 + \beta^2})$ appartengono all'asse non trasverso.