Tutorato Geometria II Modulo
a.a. 2019/2020

Esercizi svolti su Operatori Ortogonali ed Operatori Autoaggiunti

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata" - Scienza e Tecnologia dei Media
Esercizi GEOMETRIA (I modulo)
Ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, Complementi ortogonali.
Proiezioni su sottospazi. Operatori ortogonali e triangolarizzazione di operatori.
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Svolti

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, siano assegnati i vettori

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \overline{f}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare dimensione ed equazioni cartesiane di $W = Span\{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$.
(ii) Costruire a partire dal sistema di vettori $f := \{\overline{f}_1, \overline{f}_2, \overline{f}_3\}$ una base ortonormale per W.
Svolgimento: (i) Sia A la matrice che ha come colonne ordinatamente i tre vettori dati. Notiamo che $\det(A(1,2,3;1,2,3)) = 1 \neq 0$, pertanto i 3 vettori sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(W) = 3$ ed f e' una sua base. Essendo W un iperpiano in $\mathbb{R}^4$, esso e' definito da un'unica equazione cartesiana che si ottiene semplicemente sviluppando

$$\det \begin{pmatrix} X_1 & 1 & 0 & 0 \\ X_2 & 1 & 1 & 2 \\ X_3 & 0 & 1 & 3 \\ X_4 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 0,$$

i.e.

$$3X_1 - 3X_2 + 3X_3 - X_4 = 0.$$

(ii) Notiamo ad esempio che $\langle \overline{f}_1, \overline{f}_2 \rangle = 1 \neq 0$, pertanto la base f non e' ortogonale. Mediante il procedimento di Gram-Schmidt possiamo determinare da f una base ortogonale. Poniamo

$$\overline{g}_1 = \overline{f}_1.$$

Pertanto

$$\overline{g}_2 := \overline{f}_2 - \frac{\langle \overline{f}_2, \overline{g}_1 \rangle}{\langle \overline{g}_1, \overline{g}_1 \rangle} \overline{g}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aanalogamente

$$\overline{g}_3 := \overline{f}_3 - \frac{\langle \overline{f}_3, \overline{g}_1 \rangle}{\langle \overline{g}_1, \overline{g}_1 \rangle} \overline{g}_1 - \frac{\langle \overline{f}_3, \overline{g}_2 \rangle}{\langle \overline{g}_2, \overline{g}_2 \rangle} \overline{g}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{8}{3} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/3 \\ 1/3 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Il sistema di vettori $g := \{\overline{g_1}, \overline{g}_2, \overline{g_3}\}$ costituisce una base ortogonale per W ma non ortonormale, dato che ad esempio $||\overline{g}_1|| = \sqrt{2}$. Per determinare una base ortonormale per W basta quindi ortonormalizzare i vettori della base g. Notiamo che

$$||\overline{g}_1|| = \sqrt{2}, \ ||\overline{g}_2|| = \sqrt{\frac{3}{2}}, \ ||\overline{g}_3|| = \frac{7}{3}\sqrt{3}.$$

Pertanto la base ortonormale cercata e' determinata dai vettori

$$\overline{h}_1 = \frac{\overline{g}_1}{||\overline{g}_1||} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{h}_2 = \frac{\overline{g}_2}{||\overline{g}_2||} = \begin{pmatrix} -\sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/6 \\ \sqrt{6}/3 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{h}_3 = \frac{\overline{g}_3}{||\overline{g}_3||} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/21 \\ -\sqrt{3}/21 \\ \sqrt{3}/21 \\ 4\sqrt{3}/7 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^5, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_4 - X_5 & = & 0 \end{cases}$$

Sia P l' operatore lineare su $\mathbb{R}^5$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U. Determinare la matrice $M_e(P)$ cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e.

Svolgimento: (i) Notiamo che U e'

$$U = Span\{\overline{u}_1 := \overline{e}_1, \overline{u}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_3 - \overline{e}_4, \overline{u}_3 := \overline{e}_4 + \overline{e}_5\}.$$

Pertanto $U^\perp$ e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 & = & 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 & = & 0 \\ X_4 + X_5 & = & 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^\perp = Span\{\overline{w}_1 := -\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{w}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_4 - \overline{e}_5\}$.

Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^\perp$ con base v data da

$$v := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{w}_1, \overline{w}_2.$$

Pertanto la matrice cambiamento di base e'

$$M_{e,v} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Per definizione di P, si ha:

$$M_v(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$M_e(P) = M_{e,v} M_v(P) M_{v,e} = M_{e,v} M_v(P) M_{e,v}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & 2/5 & 2/5 & -1/5 & 1/5 \\ 0 & -1/5 & -1/5 & 3/5 & 2/5 \\ 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 3/5 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, siano dati i 5 vettori

$$\overline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \overline{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \overline{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \overline{v}_4 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \overline{v}_5 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(i) Denotato con $U = Span\{\overline{v}_1, \overline{v}_2, \overline{v}_3, \overline{v}_4, \overline{v}_5\}$ il sottospazio vettoriale generato dai 5 vettori, determinare una base, equazioni parametriche ed equazioni cartesiane di U.
(ii) Ortogonalizzare la base di U determinata al punto (i).
(iii) Estendere la base ortogonale di U determinata al punto (ii) ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$.
(iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane di $U^{\perp}$, il complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^3$.
Svolgimento: (i) Notiamo che

$$\overline{v}_3 = \overline{v}_1 + \overline{v}_2,\ \overline{v}_4 = 2\overline{v}_1,\ \overline{v}_5 = \overline{v}_2 - \overline{v}_1$$

mentre $\overline{v}_1$ e $\overline{v}_2$ non sono proporzionali. Pertanto $\dim(U) = 2$ ed una base di U e' proprio $u := \overline{v}_1, \overline{v}_2$. Pertanto, equazioni parametriche per U sono

$$X_1 = t + 2s,\ X_2 = 2t + s,\ X_3 = t + 3s,\ t, s \in \mathbb{R}.$$

Un'equazione cartesiana per U si puo' determinare eliminando i parametri t ed s dalle precedenti equazioni parametriche scalari, oppure considerando direttamente

$$\det\begin{pmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 0$$

che fornisce $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$.

(ii) Il primo vettore della base ortogonale di U e' $\overline{v}_1$. Utilizzando il procedimento di Gram-Schmidt abbiamo inoltre

$$\overline{w}_2 = \overline{v}_2 - \frac{\langle \overline{v}_1, \overline{v}_2 \rangle}{||\overline{v}_1||^2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{7}{6}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ -8/6 \\ 11/6 \end{pmatrix}.$$

La base ortogonale per U e' quindi $\overline{v}_1, \overline{w}_2$.

(iii) Per estendere la base ortogonale di U ad una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$ si puo' semplicemente considerare che l'equazione cartesiana di U e' $5X_1 - X_2 - 3X_3 = 0$. Poiche' tale equazione stabilisce che tutti i vettori $(a, b, c) \in U$ sono tali da soddisfare

$$5a - b - 3c = 0, \ \forall \ (a, b, c) \in U$$

questo significa in particolare che un vettore perpendicolare ad U e' :

$$\overline{w}_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

(iv) Si ha che $U^\perp = Span\{\overline{w}_3\}$ pertanto equazioni parametriche sono

$$X_1 = 5t, \ X_2 = -t, \ X_3 = -3t, \ \ t \in \mathbb{R}$$

ed equazioni cartesiane sono

$$3X_2 - X_3 = 0 = X_1 + 5X_2.$$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \, , \, \rangle$. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 + X_2 - X_3 + X_4 & = & 0 \\ 2X_2 - X_4 & = & 0 \\ X_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U.

(ii) Determinare l'equazione cartesiana del complemento ortogonale $U^\perp$ del sottospazio U.

(iii) Determinare una base ortonormale di $U^\perp$.

Svolgimento: (i) Una base di U si determina trovando una soluzione non nulla del sistema lineare omogeneo che definisce U. Pertanto una base di U e' data da $\overline{u} = (1,0,1,0)$. Quindi una base ortonormale di U e' data da $\overline{f}_1 = (1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2}, 0)$.
(ii) $U^{\perp}$ e' costituito da tutti i vettori $\overline{t} = (x_1, \ldots, x_4)$ tali che $\langle \overline{t}, \overline{u} \rangle = 0, \forall\, \overline{u} \in U$, cioe' tali che risulti:

$$X_1 + X_3 = 0.$$

Questa e' un'equazione cartesiana per il complemento ortogonale di U.
(iii) Tre autosoluzioni linearmente indipendenti della precedente equazione sono date per esempio da

$$\overline{u}_2 = (1, 0, -1, 0), \ \ \overline{u}_3 = (0, 1, 0, 0), \ \ \overline{u}_4 = (0, 0, 0, 1).$$

Pertanto $U^{\perp} = \mathrm{Span}(\overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4)$ ritrovando che ha dimensione 3, cioe' che e' un iperpiano in $\mathbb{R}^4$. La base ortonormale si puo' estrarre direttamente dalla precedente. Infatti basta prendere

$$\overline{f}_2 = \overline{u}_2/||\overline{u}_2||, \ \ \overline{f}_3 = \overline{u}_3, \ \ \overline{f}_4 = \overline{u}_4$$

Esercizio 5. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^4, \langle , \rangle)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, sia U il sottospazio di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_2 - X_3 & = & 0 \\ X_2 + X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Sia P l'operatore lineare su $\mathbb{R}^4$ dato dalla proiezione ortogonale sul sottospazio U.
(i) Stabilire il rango di P.
(ii) Stabilire se P e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, trovare la sua forma diagonale in un opportuna base.
(ii) Determinare la matrice $M_e(P)$, cioe' la matrice rappresentativa dell'operatore P in base canonica e.
Svolgimento. (i) La codimensione di U in $\mathbb{R}^4$ e' 2, i.e. U e' un piano vettoriale. Pertanto P, essendo l'operatore di proiezione ortogonale su U ha necessariamente come immagine U, quindi P ha rango 2.
(ii) Dalle equazioni cartesiane di U si trova facilmente

$$U = Span\{\overline{u}_1 := \overline{e}_1, \overline{u}_2 := \overline{e}_2 + \overline{e}_3 - \overline{e}_4\}.$$

Di conseguenza $Ker(P) = U^{\perp}$ che e' definito da equazioni cartesiane

$$\begin{cases} X_1 & = & 0 \\ X_2 + X_3 - X_4 & = & 0 \end{cases}$$

Pertanto, si ha ad esempio che $U^{\perp} = Span\{\overline{u}_3 := -\overline{e}_2 + \overline{e}_3, \overline{u}_4 := \overline{e}_2 + \overline{e}_4\}$. Consideriamo allora $\mathbb{R}^5 = U \oplus U^{\perp}$ con base u data da

$$u := \overline{u}_1, \overline{u}_2, \overline{u}_3, \overline{u}_4.$$

Per definizione di P, in base u si ha:

$$M_u(P) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

quindi P e' diagonalizzabile, $M_u(P)$ e' la sua forma diagonale (in altri termini la base u e' una base diagonalizzante).

Esercizio 6. Sia $\mathbb{R}^4$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle\, ,\, \rangle$ e di base canonica e. Sia $U \subset \mathbb{R}^4$ il sottospazio definito dalle equazioni cartesiane

$$U : \begin{cases} X_1 - X_2 & = & 0 \\ X_1 - X_4 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare la dimensione di $U^\perp$, complemento ortogonale di U in $\mathbb{R}^4$, ed una base di $U^\perp$.

(ii) Sia dato il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ di $\mathbb{R}^4$, espresso in componenti rispetto alla base canonica e. Determinare il vettore $\pi_U(\overline{v})$ ottenuto per *proiezione ortogonale* di $\overline{v}$ *sul sottospazio* U (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\overline{f}_i}(\overline{v})$, dove $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$, $k = \dim(U)$, e' una base ortonormale di U).

(iii) Determinare $||\overline{v} - \pi_U(\overline{v})||$ e $\cos(\theta)$, dove θ denota l'angolo convesso tra i vettori $\overline{v}$ e $\pi_U(\overline{v})$.

Svolgimento: (i) Poiche' $\dim(U) = 2$, necessariamente $\dim(U^\perp) = 4 - 2 = 2$. In effetti $U^\perp$ e' generato dai vettori normali ai due iperpiani che costituiscono le equazioni cartesiane di U. Quindi $U^\perp := Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.

(ii) Una base per U e' data dai vettori $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Applicando il procedimento di ortonormalizzazione di Gram-Schmidt, una base ortonormale di U e' quindi $f := \overline{f}_1 =$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ -\frac{\sqrt{6}}{6} \\ 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$$. Pertanto

$$\pi_U(\overline{v}) = \langle \overline{f}_1, \overline{v} \rangle \overline{f}_1 + \langle \overline{f}_2, \overline{v} \rangle \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{4}{3} \\ \frac{2}{3} \\ 0 \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

(iii) $||\overline{v} - \pi_U(\overline{v})|| = \frac{\sqrt{21}}{3}$ mentre $\cos(\theta) = \frac{\langle \overline{v}, \pi_U(\overline{v}) \rangle}{||\overline{v}|| \, ||\pi_U(\overline{v})||} = \frac{4}{30}\sqrt{30}$.

Esercizio 7. Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard $\langle \, , \, \rangle$ e della base canonica e. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito dalle equazioni parametriche

$$W : \begin{cases} X_1 & = & s \\ X_2 & = & s \\ X_3 & = & t \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

Dopo aver verificato che il vettore $\overline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W, determinare il vettore *proiezione ortogonale* di $\overline{v}$ *sul sottospazio* W (che per **definizione** e' il vettore ottenuto come somma di tutte le proiezioni ortogonali $\pi_{\overline{f}_i}(\overline{v})$, dove $\overline{f}_1, \ldots, \overline{f}_k$, $k = \dim(W)$, e' una base ortonormale di W).

Svolgimento. E' ovvio che $\overline{v}$ non giace in W, dato che le sue componenti non soddisfano le equazioni parametriche di W. Una base per W e' data dai vettori $\overline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\overline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Facilmente si vede che tali vettori formano una base ortogonale per W. Le proiezioni ortogonali di $\overline{v}$ su tali vettori sono

$$\pi_{\overline{b}_1}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \pi_{\overline{b}_2}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\pi_W(\overline{v}) = \pi_{\overline{b}_1}(\overline{v}) + \pi_{\overline{b}_2}(\overline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$. In effetti $\overline{v} - \pi_W(\overline{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che e' proporzionale al vettore normale a W.

Universita' degli Studi di Roma - "Tor Vergata"
Esercizi GEOMETRIA I Modulo (STM)
Operatori autoaggiunti. Teorema spettrale
Docente: Prof. F. Flamini

Esercizi Riepilogativi Svolti

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano vettoriale euclideo, munito di base canonica e e di prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Denotiamo con $\overline{x} = (x_1, x_2)$ il sistema di coordinate indotto da e. Sia data la matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Determinare un'isometria lineare M di $\mathbb{R}^2$ che diagonalizzi A.
(ii) Descrivere il cambiamento di coordinate dal riferimento dato da e al riferimento in cui A si diagonalizza.

Svolgimento: (i) e (ii): la amtrice A e' simmetrica. Quindi, in base canonica e, corrisponde ad un operatore autoaggiunto $F = F_A$. Il polinomio caratteristico di F, e quindi di A, e'

$$det(A - tI) = t(t - 5).$$

Gli autovalori di A sono

$$0 \;\; e \;\; 5.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, tali autovalori forniscono la seguente base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A:

$$\mathbf{f}_1 = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5}), \quad \mathbf{f}_2 = (-1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}).$$

Se consideriamo sullo spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^2$, munito di questa nuova base ortonormale f, coordinate (y_1, y_2) relative alla base f allora, dalle varie conseguenze del teorema Spettrale, si ha che in base f la rappresentazione di F e' data dalla forma diagonale $\Delta = Diag\{0\ 5\} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Poiche' nel testo e' richiesto esplicitamente di trovare la trasformazione (isometria lineare) di coordinate di $\mathbb{R}^2$ in cui A si diagonalizza, allora osserviamo che i versori della base f formano la matrice ortogonale

$$M = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} & -1/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Questa matrice determina la trasformazione di coordinate

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioe'

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Le coordinate $\overline{y}$ sono il sistema di coordinate dove A si diagonalizza.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $\mathbb{R}^3$, munito di base canonica e e prodotto scalare standard $\langle , \rangle$, si consideri fissato il vettore

$$\mathbf{u}_0 = (1, 2, 1).$$

Sia T l'operatore lineare di $\mathbb{R}^3$, definito da

$$T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0, \ \ \forall \ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3.$$

(i) Stabilire se T e' un operatore autoaggiunto;
(ii) Scrivere la matrice di T rispetto alla base canonica e; confrontare il risultato con quanto risposto in (i).
Svolgimento: (i) T non e' autoaggiunto. Infatti, per ogni $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, ricordando le proprieta' del prodotto vettoriale, si ha che

$$\langle T(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle (\mathbf{x} \wedge \mathbf{u}_0), \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, (\mathbf{u}_0 \wedge \mathbf{y}) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-\mathbf{y} \wedge \mathbf{u}_0) \rangle = \langle \mathbf{x}, (-T(\mathbf{y})) \rangle.$$

Poiche' un operatore coincide con il suo opposto se e solo se e' l'operatore nullo, si ha pertanto $T \neq -T$ (dato che T e' manifestamente un operatore non-identicamente nullo). Percio' T non puo' essere autoaggiunto.
(ii) Per calcolare la matrice A di T rispetto alla base canonica, basta vedere le immagini $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$, dei tre vettori della base canonica. Per definizione di T, basta calcolare i tre prodotti vettoriali

$$\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{u}_0, \quad 1 \leq i \leq 3.$$

Si ha

$$T(\mathbf{e}_1) = (0, -1, 2), \quad T(\mathbf{e}_2) = (1, 0 - 1), \quad T(\mathbf{e}_3) = (-2, 1, 0).$$

Percio' la matrice A ha per i-esima colonna il vettore $T(\mathbf{e}_i)$, $1 \leq i \leq 3$. Manifestamente si vede che la matrice A non e' una matrice simmetrica. Poiche' la matrice A e' espressa utilizzando una base ortonormale rispetto al prodotto scalare standard che esiste su $\mathbb{R}^3$, allora possiamo anche in questo modo concludere che T non puo' essere un operatore autoaggiunto, come abbiamo dedotto in modo intrinseco al punto (i).

Esercizio 3. Sia T l'operatore autoaggiunto di $\mathbb{R}^4$ (munito di prodotto scalare standard) definito rispetto alla base canonica e dalla matrice simmetrica

$$A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Utilizzando il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, diagonalizzare A determinando la base ortonormale in cui A risulta essere diagonale.
Svolgimento: Il polinomio caratteristico di A e'

$$P_A(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2.$$

Quindi A ha due autovalori, i.e. 1 e -1, ambedue di molteplicita' algebrica 2. Denotati con V_1 e V_{-1} i rispettivi autospazi, troviamo che

$$V_1 = Span\{(1, 0, 0, 0),\ (0, 0, 1, 1)\}, \quad V_{-1} = Span\{(0, 1, 0, 0),\ (0, 0, 1, -1)\}$$

poiche' le equazioni cartesiane per V_1 sono

$$X_2 = X_3 - X_4 = 0,$$

mentre quelle per V_{-1} sono

$$X_1 = X_3 + X_4 = 0.$$

Per il teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, per diagonalizzare A basta considerare una base ortonormale di autovettori di A.
Sappiamo che i due autospazi V_1 e V_{-1} sono gia' fra di loro ortogonali, poiche' sono autospazi relativi ad autovalori distinti. Osserviamo inoltre che i generatori di V_1 (rispettivamente di V_{-1}) sono due vettori ortogonali. Percio' per determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^4$ costituita da autovettori di A, basta normalizzare i 4 vettori trovati. Otteniamo che la base voluta e'

$$f := \{(1, 0, 0, 0),\ \ (0, 0, 1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}),\ \ (0, 1, 0, 0),\ \ (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})\}.$$

Dalla teoria generale, in tale base, la matrice A diventa congruente alla matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

cioe' alla matrice che ha sulla diagonale principale gli autovalori di A, nell'ordine relativo alla scelta dell'ordinamento dei vettori della base f, ciascun autovalore ripetuto tante volte quanto e' la sua molteplicita' algebrica (equivalentemente geometrica).

Esercizio 4. Stabilire la forma diagonale della seguente matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Svolgimento: A e' simmetrica in base canonica, quindi per il Teorema spettrale degli operatori autoaggiunti, A e' sicuramente diagonalizzabile. Gli autovalori di A sono 2 e 4 e la sua forma diagonale e' $\Delta = Diag(2\ 4) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Esercizio 5. Stabilire la forma diagonale della seguente matrice

$$A := \begin{pmatrix} 7 & -5\sqrt{3} \\ -5\sqrt{3} & -3 \end{pmatrix}.$$

trovando esplicitamente una base diagonalizzante per A.

Svolgimento: Poiché $det\ A = -96 < 0$, esisteranno due autovalori reali discordi. Denotata con T un'indeterminata, il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T^2 - 4T - 96$$

che ha soluzioni

$$\lambda_1 = 12 \quad \lambda_2 = -8.$$

Utilizzando il Teorema Spettrale degli operatori autoaggiunti, la base ortonormale di $\mathbb{R}^2$ costituita da autovettori di A è ad esempio la base

$$\overline{f}_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \quad \overline{f}_2 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

La matrice cambiamento di base $M = M_{e\ f}$ è quindi

$$M := \begin{pmatrix} \sqrt{3}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}.$$

che è ovviamente una matrice ortogonale, essendo e ed f ambedue basi ortonormali. La trasformazione di coordinate è quindi

$$\overline{x} = M\overline{y},$$

cioè

$$x_1 = \sqrt{3}/2 y_1 + 1/2 y_2, \quad x_2 = -1/2 y_1 + \sqrt{3}/2 y_2.$$

Ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che in tali coordinate A diventa $Diag(12\ -8)$ dato che $\overline{f}_1$ era l'autovettore relativo all'autovalore $\lambda_1 = 12$, mentre $\overline{f}_2$ è quello relativo a $\lambda_2 = -8$.

Esercizio 7. Consideriamo $\mathbb{R}^2$ come piano vettoriale euclideo munito di base canonica e e prodotto scalare standard $\langle , \rangle$. Sia dato il polinomio quadratico in due indeterminate

$$P(x_1, x_2) :== x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 = \langle \overline{x}, A\overline{x} \rangle,$$

dove $\overline{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ e' il vettore colonna delle indeterminate ed

$$A := \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Trovare un cambiamento lineare ortogonale di coordinate $\overline{x} = M\overline{y}$ di modo che il polinomio ottenuto per sostituzione $P(M\overline{y}) = P'(y_1, y_2)$ sia un polinomio, omogeneo di secondo grado senza il termine misto y_1y_2.

Svolgimento: La matrice A e' simmetrica. Il polinomio caratteristico di A è

$$det\ (A - TI) = T(T - 5),$$

dove T un'indeterminata. Gli autovalori di A forniscono quindi, grazie al Teorema Spettrale, la seguente trasformazione di coordinate

$$x_1 = 2/\sqrt{5}y_1 - 1/\sqrt{5}y_2, \quad x_2 = 1/\sqrt{5}y_1 + 2/\sqrt{5}y_2.$$

Ricordando che le coordinate (y_1, y_2) diagonalizzano A, si trova rapidamente che nelle nuove coordinate, il polinomio diventa $5y_2^2$.