Tutorato 8

Giulia Iezzi

22/05/2020

Esercizio 1

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento standard $RC(O; x, y, z)$, siano dati il piano $\pi : x + 2y = 0$ e la retta

$$l : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ t \in \mathbb{R}.$$

a) Trovare le equazioni cartesiane della retta r ottenuta per proiezione ortogonale di l sul piano π.

b) Scrivere le formule della rotazione $R_{\frac{\pi}{2},l}$ di angolo $\frac{\pi}{2}$ attorno alla retta orientata l.

c) Calcolare le equazioni parametriche della retta $m = R_{\frac{\pi}{2},l}(r)$, ottenuta cioè per rotazione di angolo $\frac{\pi}{2}$ della retta r attorno alla retta orientata l.

Svolgimento:

a) Le equazioni cartesiane di l sono

$$\begin{cases} x - z = 0 \\ x - y = 1 \end{cases},$$

perciò il fascio F dei piani che hanno come asse la retta l ha equazione

$$(\lambda + \mu)x - \mu y - \lambda z - \mu = 0,\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0).$$

La retta r è l'intersezione del piano π con l'unico piano del fascio F che è ortogonale a π; per trovare questo impongo la condizione

$$\begin{pmatrix} \lambda + \mu \\ -\mu \\ -\lambda \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \lambda - \mu = 0$$

e quindi le equazioni cartesiane di r sono

$$\begin{cases} 2x - y - z = 1 \\ x + 2y = 0. \end{cases}$$

b) Denotiamo con $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ il vettore direttore di l. Sia $f = \{\vec{f_1}, \vec{f_2}, \vec{f_3}\}$ una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, positivamente orientata e con $\vec{f_1} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$, cioè:

$$\vec{f_1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}, \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{f_3} = \vec{f_1} \wedge \vec{f_2} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{2\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

In base f, la matrice di rotazione $R_{\frac{\pi}{2},l}$ è

$$A^f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se $M = M_{e,f}$ denota la matrice cambiamento di base dalla base canonica e alla base ortonormale f, M è una matrice ortogonale. Conseguentemente, la matrice della rotazione $R_{\frac{\pi}{2},l}$ in base e è

$$A = MAM^t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3} & \frac{1+\sqrt{3}}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

e le formule di rotazione attorno alla retta l sono date da

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \left(A \cdot \left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right) \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{1-\sqrt{3}}{3}y + \frac{1+\sqrt{3}}{3}z + \frac{1-\sqrt{3}}{3} \\ \frac{1+\sqrt{3}}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1-\sqrt{3}}{3}z - \frac{2}{3} \\ \frac{1-\sqrt{3}}{3}x + \frac{1+\sqrt{3}}{3}y + \frac{1}{3}z + \frac{1+\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}.$$

c) Il vettore direttore $\vec{w}$ della retta r è dato dal prodotto vettoriale dei vettori normali ai piani che definiscono l'equazione cartesiana di r, e quindi è

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Il ruotato del vettore $\vec{w}$ è $A(\vec{w}) = \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Prendiamo ora un punto arbitrario su r, ad esempio $P = (0,0,-1)$; applicando al punto P le formule di rotazione trovate precedentemente otteniamo $Q = (\frac{-2\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}-3}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3})$ e quindi m ha equazioni parametriche

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-2\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}-3}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 2

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento ortonormale standard $RC(O; x, y, z)$, si consideri la sfera S di centro l'origine O e raggio $r = 2$. Sia inoltre π il piano di equazione cartesiana $x - z = 3$.

a) Determinare le formule della riflessione S_π rispetto al piano π.

b) Determinare l'equazione cartesiana della sfera S' ottenuta per riflessione della sfera S rispetto a π.

c) Sia $P = (1, 1, \sqrt{2}) \in S$ e sia $S_\pi(P) \in S'$ il riflesso di P rispetto a π. Determinare l'equazione cartesiana del piano tangente alla sfera S' nel punto $S_\pi(P)$.

d) Sia α il piano di equazione cartesiana $z + 2 = 0$. Dopo aver verificato che α passa per $S_\pi(P)$, determinare l'equazione cartesiana della retta tangente nel punto $S_\pi(P)$ alla circonferenza $S' \cap \alpha$.

Svolgimento:

a) Sia $K = (a, b, c)$ un punto arbitrario di $\mathbb{R}^3$. Le equazioni parametriche della retta h passante per K e perpendicolare a π sono

$$x = a + t, y = b, z = c - t, \ t \in \mathbb{R}.$$

Per trovare il valore di t che corrisponde al punto di intersezione $h \cap \pi$ imponiamo

$$a + t_0 - c + t_0 - 3 = 0$$

e troviamo

$$t_0 = \frac{1}{2}(-a + c + 3).$$

Il punto simmetrico di K rispetto a π si ottiene per il valore di $t = 2t_0$, cioè $2t_0 = -a+c+3$; sostituendo questo valore di t nelle equazioni parametriche di h otteniamo

$$x = c + 3, y = b, z = a - 3.$$

Le formule di riflessione rispetto a π sono quindi

$$S_\pi \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z+3 \\ y \\ x-3 \end{pmatrix}.$$

b) Il centro O' di S' è

$$O' = S_\pi \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

e poiché S_π è un'isometria il raggio di S' è sempre $r = 2$. Pertanto, l'equazione cartesiana di S' è $(x - 3)^2 + y^2 + (z + 3)^2 = 4$.

c) Si ha $S_\pi(P) = (3 + \sqrt{2}, 1, -2)$ e basta sostituire le sue coordinate nell'equazione di S' per verificare che esso appartiene a S'. Un vettore normale al piano tangente a S' in $S_\pi(P)$ è dato da

$$\overrightarrow{OO'} - \overrightarrow{OS_\pi(P)} = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

pertanto l'equazione del piano tangente a S' in $S_\pi(P)$ è della forma $\sqrt{2}x + y + z + d = 0$; imponendo il passaggio per $S_\pi(P)$ troviamo $d = -1 - 3\sqrt{2}$, quindi il piano tangente cercato è $\sqrt{2}x + y + z - 1 - 3\sqrt{2} = 0$.

d) L'equazione di C' è data da

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 + (z+3)^2 - 4 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases},$$

cioè è

$$\begin{cases} (x-3)^2 + y^2 - 3 = 0 \\ z + 2 = 0 \end{cases},$$

e la retta cercata ha equazione

$$\begin{cases} \sqrt{2}x + y + z - 1 - 3\sqrt{2} = 0 \\ z + 2 = 0. \end{cases}$$

Esercizio 3

Sia $(\mathbb{H},+,\cdot)$ lo spazio dei quaternioni e siano $\underline{i},\underline{j},\underline{k}$ le tre unità immaginarie in $(\mathbb{H},+,\cdot)$. Siano dati i due quaternioni non nulli

$$\underline{a}=\underline{i}+\underline{j}\in\mathbb{H} \quad \text{e} \quad \underline{b}=-\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\underline{i}+\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\underline{j}\in\mathbb{H}.$$

a) Determinare il quaternione prodotto $\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{b}$.

b) Detrerminare il quaternone unitario $\underline{q}$ associato a $\underline{c}$.

c) Identificando lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il sottospazio $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ degli immaginari puri di $\mathbb{H}$, con le usuali identificazioni tra $\underline{i},\underline{j}$ e $\underline{k}$ e i vettori ordinati della base canonica e di $\mathbb{R}^3$, determinare la matrice rappresentativa nella base e della rotazione lineare corrispondente alla coniugazione mediante $\underline{q}$, cioè per ogni $\underline{p}\in\mathbb{R}^3=\mathrm{Im}(\mathbb{H})$

$$\Omega_{\underline{q}}(\underline{p})=\underline{q}\cdot\underline{p}\cdot\underline{q}*=M_{e,e}(R_{\theta,\underline{u}})(\underline{p}),$$

dove l'asse vettoriale di rotazione $\mathrm{Span}\{\underline{u}\}$ e l'angolo θ sono da determinare opportunamente.

Svolgimento:

a) Ricordando le relazioni che sussistono in $(\mathbb{H},+,\cdot)$ si ha $\underline{c}=\underline{a}\cdot\underline{b}=\sqrt{3}+\underline{k}$.

b) Si ha

$$\underline{q}=\frac{c}{\sqrt{\|\underline{c}\|}}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\underline{k}.$$

c) Ricordando che i quaternioni unitari sono tutti e soli della forma $(\underline{u}_{\underline{q}}\sin\omega,\cos\omega)$, notiamo che $\underline{u}_{\underline{q}}=\underline{e}_3$ e

$$\sin\omega=\frac{1}{2},\cos\omega=\frac{\sqrt{3}}{2}\implies\omega=\frac{\pi}{6}.$$

Dato che il coniugio $\Omega_{\underline{q}}$ è associato alla rotazione di asse $\underline{u}_{\underline{q}}$ e angolo 2ω, la rotazione associata al quaternione $\underline{q}$ è quella attorno all'asse $\mathrm{Span}\{\underline{e}_3\}$ e di angolo $\theta=\frac{\pi}{3}$, la cui matrice rappresentativa nella base canonica e è

$$M_{e,e}\left(R_{\frac{\pi}{3},\underline{e}_3}\right)=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$