Tutorato 7

Giulia Iezzi

15/05/2020

Esercizio 1

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con origine O e coordinate (x, y, z), siano date le due coppie di punti $P_1 = (1, 1, 1), P_2 = (0, 2, -1)$ e $Q_1 = (1, 2, 0), Q_2 = (3, 4, 3)$.

a) Determinare equazioni parametriche della retta l, congiungente i punti P_1 e P_2, e della retta r, congiungente i punti Q_1 e Q_2.

b) Verificare che la trasformazione

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

trasforma la retta l nella retta r.

c) Determinare gli eventuali punti fissi della trasformazione F, cioè i punti $H \in \mathbb{R}^3$ per cui $F(H) = H$.

Svolgimento:

a) l è la retta passante per P_1 e con vettore direttore $\underline{v} = P_2 - P_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, pertanto le sue equazioni parametriche sono

$$x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 1 + 2t,\ t \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, r è la retta passante per Q_1 con vettore direttore $\underline{w} = Q_2 - Q_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$; quindi le sue equazioni parametriche sono

$$x = 1 + 2s,\ y = 2 + 2s,\ z = 3s,\ s \in \mathbb{R}.$$

b) Si verifica facilmente che $F(P_i) = Q_i,\ i = 1, 2$, e quindi F traforma la retta l nella retta r.

c) I punti fissi di F sono tutti e soli i vettori di $\mathbb{R}^3$ che soddisfano la relazione

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix};$$

in altri termini, l'eventuale luogo di punti fissi di F è determinato dall'autospazio associato all'autovalore 1. Si verifica facilmente che in effetti 1 è autovalore della matrice associata alla trasformazione F e che ha molteplicità algebrica e geometrica uguale a 1; l'autospazio associato ha equazione

$$y = z = 0,$$

che è l'asse delle ascisse.

Esercizio 2

Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento standard $RC(O; x, y)$, sia data la retta

$$r : x - y + 3 = 0.$$

a) Determinare le formule di riflessione rispetto alla retta r.

b) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza K ottenuta riflettendo rispetto alla retta r la circonferenza D di centro $C = (2, 1)$ e raggio 2.

c) Dopo aver verificato che $Q = (0, 5) \in K$, calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza K nel punto Q.

Svolgimento:

a) Sia $P = (a, b)$ il punto generico di $\mathbb{R}^2$. La retta s perpendicolare a r passante per P ha equazione parametrica

$$s : \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Il valore di t che corrisponde all'intersezione tra r e s è

$$t_0 = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{3}{2},$$

quindi sostituendo $2t_0$ al posto di t nell'equazione parametrica di s troviamo l'immagine del punto P tramite la riflessione f rispetto alla retta r, cioè

$$f \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b - 3 \\ a + 3 \end{pmatrix}.$$

Le formule di riflessione sono quindi

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

b) Poiché una riflessione rispetto ad una retta è un'isometria, il raggio di D rimarrà invariato, perciò è sufficiente conoscere le coordinate del riflesso di C, cioè calcoliamo $C' = f(C) = (-2, 5)$. L'equazione cartesiana di K è quindi

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4.$$

c) Un vettore normale a K in Q è dato da $Q - C' = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$, e quindi un'equazione cartesiana per la retta tangente è

$$2(x - 0) + 0(y - 5) = 0,$$

che fornisce $x = 0$.

Esercizio 3

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento standard $RC(O; x, y, z)$, sia α il piano di equazione cartesiana

$$\alpha : 2x - y + z = 4.$$

a) Determinare l'isometria S_α di $\mathbb{R}^3$ descritta dalle formule di riflessione rispetto al piano α.

b) Descrivere i punti fissi di S_α.

c) Determinare equazioni parametriche del piano π ottenuto per riflessione rispetto ad α del piano coordinato $z = 0$.

Svolgimento:

a) Sia $P = (a, b, c)$ un punto arbitrario di $\mathbb{R}^3$. Un vettore normale al piano α è il vettore $\underline{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Pertanto la retta r, passante per P e perpendicolare a α, ha equazione parametrica vettoriale

$$\underline{x} = \underline{P} + t\underline{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$x = a + 2t, \ y = b - t, \ z = c + t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con α otteniamo il valore di t

$$t_0 = \frac{4 + b - c - 2a}{6}.$$

Quindi, se $S_\alpha(P)$ denota il simmetrico di P rispetto a α, esso si ottiene come punto della retta r corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioè

$$S_\alpha(P) = (a, b, c) + \frac{4 + b - c - 2a}{6} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

In definitiva, le formule di riflessione rispetto a α sono

$$S_\alpha(a, b, c) = (-\frac{a}{3} + \frac{2b}{3} - \frac{2c}{3} + \frac{8}{3}, \ \frac{2a}{3} + \frac{2b}{3} + \frac{c}{3} - \frac{4}{3}, \ -\frac{2a}{3} + \frac{b}{3} + \frac{2c}{3} + \frac{4}{3}).$$

b) Il luogo dei punti fissi di S_α è il piano α stesso, per definizione di riflessione.

c) Prendiamo tre punti non allineati sul piano $z = 0$, ad esempio $(0, 0, 0), (0, 1, 0)$ e $(1, 0, 0)$. I loro riflessi sono rispettivamente $A = (\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}), B = (\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{5}{3})$ e $C = (\frac{7}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$. Due vettori direttori per la giacitura di π sono dati ad esempio da $B - A \sim (2, 2, 1)$ e $C - A \sim (1, -2, 2)$. Pertanto, equazioni parametriche di π sono date da

$$(x, y, z) = (\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, \frac{4}{3}) + t(2, 2, 1) + s(1, -2, 2), \ t, s \in \mathbb{R}.$$