Tutorato 6

Giulia Iezzi

08/05/2020

Esercizio 1

Sia dato il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$. Siano date le rette

$$l_1 : x - 2y - 1 = 0 \qquad l_2 : x + y + 4 = 0 \qquad l_3 : 2y - x + 4 = 0.$$

a) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare i punti impropri di l_1, l_2 e l_3.

b) Detti $\overline{l_1}, \overline{l_2}$ e $\overline{l_3}$ i completamenti proiettivi delle rispettive rette, determinare le intersezioni a due a due delle tre rette proiettive $\overline{l_1}, \overline{l_2}$ e $\overline{l_3}$.

c) Determinare le equazioni cartesiane delle tracce che la retta proiettiva $\overline{l_1}$ ha nelle altre carte affini $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento:

a) Il completamento proiettivo di l_1 ha equazione omogenea

$$X_1 - 2X_2 - X_0 = 0.$$

Il punto improprio di l_1 è quindi dato dal sistema

$$X_0 = 0 = X_1 - 2X_2,$$

che ha come soluzione $[0, 2, 1]$. Il completamento proiettivo di l_2 ha equazione omogenea

$$X_1 + X_2 + 4X_0 = 0$$

Il punto improprio di l_2 è quindi dato dal sistema

$$X_0 = 0 = X_1 + X_2,$$

che ha come soluzione $[0, 1, -1]$. Infine, il completamento proiettivo di l_3 ha equazione omogenea

$$4X_2 - 2X_1 + 8X_0 = 0,$$

pertanto il punto improprio di l_3 è lo stesso di quello di l_1 (infatti, notiamo che le due rette di $\mathbb{R}^2$ sono parallele).

b) Osserviamo subito che l_1 e l_2 si intersecano in $\mathbb{R}^2$ nel punto di coordinate

$$(x, y) = (-\frac{7}{3}, -\frac{5}{3})$$

e quindi l'intersezione in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ dei loro completamenti proiettivi è $[3,-7,-5]$; il discorso è analogo per l_2 e l_3. Invece il sistema non omogeneo formato dalle equazioni cartesiane di l_1 e l_3 è incompatibile, cioè non si intersecano in $\mathbb{R}^2$ (avevamo già osservato che sono parallele); questo significa che le due rette hanno il medesimo punto improprio, e quindi

$$\overline{l_1} \cap \overline{l_3} = [0,2,1].$$

Questa intersezione non è visibile nella carta affine $\mathcal{A}_0$.

c) Nella carta $\mathcal{A}_1$ abbiamo $X_1 \neq 0$, e quindi coordinate

$$\xi = \frac{X_0}{X_1},\ \eta = \frac{X_2}{X_1}.$$

Pertanto la retta $\overline{l_1}$ ha traccia nella carta $\mathcal{A}_1$ la retta affine di equazione

$$\xi + 2\eta - 1 = 0.$$

Nella carta affine $\mathcal{A}_2$ abbiamo $X_2 \neq 0$, e quindi coordinate

$$z = \frac{X_0}{X_2}, w = \frac{X_1}{X_2},$$

pertanto $\overline{l_1}$ ha come traccia la retta affine di equazione

$$z - w + 2 = 0.$$

Esercizio 2

Nello spazio proiettivo $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$, con coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2, x_3]$, si considerino i punti $P = [1,0,0,2], Q = [0,1,-1,1]$ e $R = [1,1,-1,1]$.

a) Stabilire se i tre punti sono allineati.

b) Trovare l'equazione cartesiana della retta congiungente P e Q.

c) Determinare le equazioni cartesiane delle tracce che la retta proiettiva trovata nel punto precedente ha nelle carte affini $\mathcal{A}_i \quad \forall i = 0, ..., 3$.

d) Si consideri la trasformazione proiettiva G di $\mathbb{P}^3$ determinata dalla classe di proporzionalità di matrici λB, dove

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Che effetto ha la trasformazione G sui punti P, Q e R? E sul piano che li contiene? Q è punto fisso per G?

Svolgimento:

a) La retta in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ congiungente P e Q corrisponde alla retta affine in $\mathbb{R}^3$ che passa per il punto $(0,0,2)$ e ha vettore direttore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, cioè è la retta di $\mathbb{R}^3$

$$l = \begin{cases} x = t \\ y = -t \\ z = 2 + t \end{cases}.$$

Il punto R corrisponde in $\mathbb{R}^3$ al punto $(1,-1,1)$, che non appartiene ad l, e quindi i tre punti non sono allineati.

b) L'equazione cartesiana di l in $\mathbb{R}^3$ è $\begin{cases} x+y=0 \\ z+y=2 \end{cases}$, che in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ diventa

$$\bar{l} = \begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ 2X_0 - X_2 - X_3 = 0 \end{cases}.$$

c) Per quanto riguarda $\mathcal{A}_0$, osserviamo che la traccia di $\bar{l}$ in questa carta non è altro che l'equazione cartesiana $\begin{cases} x+y=0 \\ z+y=2 \end{cases}$ trovata al punto precedente (si ottiene supponendo $X_0 \neq 0$, così le coordinate affini sono $x = \frac{X_1}{X_0}, y = \frac{X_2}{X_0}$ e $z = \frac{X_3}{X_0}$). Per la carta $\mathcal{A}_1$, supponiamo $X_1 \neq 0$ e definiamo quindi le coordinate affini:

$$\xi = \frac{X_0}{X_1},\ \eta = \frac{X_2}{X_1},\ \zeta = \frac{X_3}{X_1}.$$

In questo caso, l'equazione cartesiana di $\bar{l}$ diventa $\begin{cases} \eta = -1 \\ 2\xi - \eta - \zeta = 0 \end{cases}$. In maniera analoga si trovano le tracce di $\bar{l}$ in $\mathcal{A}_2$ e $\mathcal{A}_3$.

d) Si vede applicando B ai tre punti che le loro immagini hanno $X_0 = 0$, quindi P, Q e R vengono mandati nel piano che ha equazione cartesiana $X_0 = 0$. Il piano generato dai tre punti P, Q e R si trova imponendo

$$\det \begin{pmatrix} X_0 & 1 & 0 & 1 \\ X_1 & 0 & 1 & 1 \\ X_2 & 0 & -1 & -1 \\ X_3 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

ed è quindi $X_1 + X_2 = 0$; poiché G è una proiettività, manda i tre punti indipendenti P, Q e R in tre punti indipendenti del piano $X_0 = 0$, e quindi tutto il piano $X_1 + X_2 = 0$ viene mandato nel piano $X_0 = 0$ (si può vedere applicando B al generico punto $[\alpha, \beta, -\beta, \gamma]$ del piano $X_1 + X_2 = 0$: la sua immagine ha prima entrata nulla). Infine, applicando B al punto Q si ottiene $[0, 2, -2, 2]$, ma $[0, 2, -2, 2] = [0, 1, -1, 1]$, quindi Q è punto fisso per la proiettività G.

Esercizio 3

Nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si consideri la trasformazione proiettiva F di $\mathbb{P}^2$ determinata dalla classe di proporzionalità di matrici λA, dove

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determinare quali delle rette fondamentali del riferimento standard di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ sono rette fisse per la proiettività F.

b) Stabilire se ciascuna retta fissa determinata al punto a) è retta di punti fissi per F.

c) Determinare i punti fissi di F.

Svolgimento:

a) Le rette $X_0 = 0$ e $X_1 = 0$ non sono rette fisse per F. Infatti, per ogni $(\alpha, \beta) \neq (0, 0)$ si ha

$$F([0, \alpha, \beta]) = [2\beta - \alpha, \alpha - \beta, \beta]$$

e

$$F([\alpha, 0, \beta]) = [2\beta - \alpha, -\beta, \beta].$$

Invece $X_2 = 0$ è una retta fissa per F, perché

$$F([\alpha, \beta, 0]) = [-\beta - \alpha, \beta, 0].$$

b) Si vede dalla parte a) che la retta $X_2 = 0$ non è retta di punti fissi per F.

c) I punti fissi (α, β) su $X_2 = 0$ si ottengono per quei valori di α e β tali che

$$-\alpha - \beta = \lambda\alpha, \quad \beta = \lambda\beta.$$

Risolvendo troviamo i due punti $[1, -2, 0], [1, 0, 0]$. Questi sono effettivamente gli unici punti fissi di F. Infatti, la matrice A ha polinomio caratteristico $P_A(t) = -(t + 1)(1 - t)^2$, che ha soluzioni $t = -1$ (soluzione semplice) e $t = 1$ (con molteplicità 2), quindi i relativi autospazi in $\mathbb{R}^3$ sono proprio generati da, rispettivamente, $(1, 0, 0)$ e $(1, -2, 0)$.