Tutorato 5

Giulia Iezzi

24/04/2020

Esercizio 1

Sia $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ la retta proiettiva reale e siano dati $P = [3, 2]$ e $Q = [-6, -4]$.

a) Stabilire se $P = Q$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

b) Trovare equazioni cartesiane e parametriche di P in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

c) Determinare i punti traccia di P nelle carte affini fondamentali $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{A}_1$ di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

Poi si considerino i punti $A = [1, 1, -1]$, $B = [1, 1, 0]$ e $C = [2, 1, 0]$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

d) Stabilire se i punti sono allineati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

e) Determinare l'equazione cartesiana omogenea della retta per i punti $A = [1, 1, -1]$ e $B = [1, 1, 0]$.

f) Determinare l'intersezione delle rette $2X_0 - 2X_1 + 3X_2 = 0$ e $2X_0 - 4X_1 + 6X_2 = 0$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

Svolgimento:

a) Poiché i vettori corrispondenti ai punti P e Q sono proporzionali, ne segue che $P = Q$ in $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$.

b) Equazioni cartesiane per P sono date da $2X_0 - 3X_1 = 0$, mentre equazioni parametriche sono $X_0 = 3\lambda, X_1 = 2\lambda, \lambda \neq 0$.

c) Nella carta $\mathcal{A}_0$ il punto P ha traccia $x = \frac{2}{3}$, mentre nella carta $\mathcal{A}_1$ ha traccia $\xi = \frac{3}{2}$.

d) I punti A, B e C sono allineati in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ se e solo se i tre vettori corrispondenti dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ sono linearmente dipendenti. Poiché il vettore corrispondente al punto A non può essere combinazione lineare dei vettori corrispondenti ai punti B e C, i tre punti di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non sono allineati.

e) L'equazione cartesiana della retta congiungente A e B è la stessa del sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ generato dai vettori corrispondenti ai punti A e B, e quindi è $X_0 - X_1 = 0$.

f) Notiamo che le due rette date hanno come tracce nella carta affine $\mathcal{A}_0$ rispettivamente le rette:

$$2 - 2x + 3y = 0 \quad 1 - 2x + 3y = 0.$$

Esse sono parallele ma non coincidenti, pertanto l'intersezione delle due rette proiettive date è il loro punto improprio comune, che è $[0, 3, 2]$.

Esercizio 2

Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$ sia dato il fascio $\mathcal{F}$ di rette parallele

$$x + 2y = t$$

con $t \in \mathbb{R}$. Identificando $\mathbb{R}^2$ con la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il fascio di rette proiettive che ha come traccia in $\mathcal{A}_0$ il fascio di retta affini dato.

Svolgimento:

Visto che le rette del fascio in $\mathbb{R}^2$ sono tutte parallele, allora il fascio di rette proiettive è quello costituito dalle rette che passano per il punto $[0, 2, -1] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Notiamo quindi che questo è un *fascio di rette a centro*, dove il centro è il punto improprio comune a tutte le rette affini di $\mathcal{F}$. Se scriviamo l'equazione

$$X_1 + 2X_2 - tX_0 = 0, \quad t \in \mathbb{R}$$

stiamo descrivendo il completamento di tutte le rette del fascio $\mathcal{F}$. Per individuare tutte le rette del fascio $\overline{\mathcal{F}}$ di rette proiettive di centro $[0, 2, -1]$ dobbiamo includere la retta $X_0 = 0$, che è impropria per $\mathcal{A}_0$. Possiamo considerare $t = \frac{\mu}{\lambda}$, e quindi $\overline{\mathcal{F}}$ sarà

$$\lambda X_1 + 2\lambda X_2 - \mu X_0 = 0,$$

da cui per $[\lambda, \mu] = [0, 1]$ otteniamo appunto la retta $X_0 = 0$, mentre per $\lambda \neq 0$ la precedente equazione è equivalente a $X_1 + 2X_2 - tX_0 = 0$, che descrive le uniche rette di $\overline{\mathcal{F}}$ che hanno una traccia in $\mathcal{A}_0$.

Esercizio 3

Sia dato il piano cartesiano $\mathbb{R}^2$ con riferimento cartesiano $RC(O; x, y)$. Si consideri la retta r di equazione cartesiana $2x + 3y = 1$.

a) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine $\mathcal{A}_0$ di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il punto improprio di r.

b) Trovare l'equazione cartesiana della retta passante per $(1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e avente come punto improprio $[0, 1, 2]$.

Svolgimento:

a) Il punto improprio di r è dato dalle soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} 2X_1 + 3X_2 - X_0 = 0 \\ X_0 = 0 \end{cases}$$

e quindi è $[0, 3, -2]$.

b) Avere punto improprio $[0, 1, 2]$ per una retta affine di $\mathbb{R}^2$ equivale a dire che ha vettore direttore $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, pertanto la retta cercata è $s = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\}$.