Tutorato 4

Giulia Iezzi

10/04/2020

Esercizio 1

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con origine O e coordinate (x, y, z), si trovi l'equazione della sfera con centro in $C = (1, 2, 3)$ e tangente al piano $\tau : x + y + 2z - 1 = 0$. Dire com'è (esterno, tangente o secante) il piano $\pi : x + z = 0$ rispetto alla sfera trovata.

Svolgimento: Perché la sfera S sia tangente a τ, deve avere raggio r uguale alla distanza tra τ e il centro C; usando la formula della distanza punto–piano troviamo $r = \frac{8}{\sqrt{6}}$, e quindi la sfera S ha equazione cartesiana $(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{32}{3}$. Per capire la posizione reciproca di π e S confrontiamo la distanza dal centro della sfera al piano π e il raggio della sfera:

$$d(C, \pi) = \frac{|1+3|}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

Dato che $2\sqrt{2} < \frac{8}{\sqrt{6}}$ il piano π è secante per la sfera S, e si può vedere mettendo a sistema le equazioni di π e S (ed effettuando opportuni cambi di riferimento) che la loro intersezione è una circonferenza.

Esercizio 2

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con origine O e coordinate (x, y, z), sia data la sfera S di centro il punto $C = (1, 0, 1)$ e raggio $r = 2$.

a) Verificare che la retta r, di equazioni parametriche: $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2t \\ z = 1 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, è una retta secante di S, determinando esplicitamente le coordinate dei due punti $S \cap r = \{P_1, P_2\}$.

b) Scrivere le equazioni dei piani π_1 e π_2 tangenti alla sfera S rispettivamente nei punti P_1 e P_2, dove P_1 (rispettivamente P_2)è il punto di ordinata positiva (rispettivamente negativa) trovato al punto a).

Svolgimento:

a) La retta r passa per il centro C di S (infatti assegnando il valore $t = 0$ nelle equazioni parametriche di r si ottiene proprio il punto C), quindi r è sicuramente secante per S.

L'equazione cartesiana di S è $(x-1)^2+y^2+(z-1)^2=4$; sostituendo in questa le equazioni parametriche di r otteniamo l'equazione $6t^2-4=0$, che fornisce i valori $t=\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$ corrispondenti ai punti P_1 e P_2:

$$P_1=\left(\frac{3+\sqrt{6}}{3},\frac{2\sqrt{6}}{3},\frac{3-\sqrt{6}}{3}\right),P_2=\left(\frac{3-\sqrt{6}}{3},\frac{-2\sqrt{6}}{3},\frac{3+\sqrt{6}}{3}\right).$$

b) Troviamo l'equazione cartesiana del piano π_1 (π_2 si trova allo stesso modo), imponendo che passi per P_1 e sia normale al vettore $\overrightarrow{CP_1}$.

$$\overrightarrow{CP_1}=\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{6}}{3}\\ \frac{2\sqrt{6}}{3}\\ -\frac{\sqrt{6}}{3}\end{pmatrix}$$

quindi l'equazione di π_1 è della forma $\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}y-\frac{\sqrt{6}}{3}z+d=0$; imponendo il passaggio per P_1 si trova $d=-4$, quindi $\pi_1:\frac{\sqrt{6}}{3}x+\frac{2\sqrt{6}}{3}y-\frac{\sqrt{6}}{3}z-4=0$.

Esercizio 3

Trovare l'equazione della sfera tangente nell'origine al piano σ di equazione $x+y+z=0$ e tangente anche al piano τ di equazione $x+y+2z-1=0$.

Svolgimento: Il centro della sfera deve giacere sulla retta r passante per l'origine e perpendicolare a σ, cioè diretta come $\vec{p}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$; normalizzando $\vec{p}$ otteniamo il versore normale $\vec{n}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$, quindi possiamo scrivere l'equazione parametrica di $r=t\vec{n}$, con $t\in\mathbb{R}$. Ora, la sfera è tangente a τ se e solo se la distanza tra il suo centro e il punto di tangenza con τ è uguale alla distanza tra il suo centro e il punto di tangenza con σ, ossia l'origine. Dato che il centro C della sfera giace su r, la sua distanza dall'origine è $|t|$, mentre la distanza tra C e il piano τ è $\frac{\left|\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}+2\frac{t}{\sqrt{3}}-1\right|}{\sqrt{6}}$.

Quindi C è il centro della sfera $\iff |t|=\frac{\left|\frac{t}{\sqrt{3}}+\frac{t}{\sqrt{3}}+2\frac{t}{\sqrt{3}}-1\right|}{\sqrt{6}} \iff |t|=\frac{|4t-\sqrt{3}|}{3\sqrt{2}}$.

Sciogliendo i moduli si trovano due possibili valori di t: $t_1=-\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-4}$ e $t_2=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}+4}$ (si osservi che effettivamente sono due le sfere che soddisfano le richieste).

Se scegliamo ad esempio t_1 troviamo la sfera con centro $C_1=(-\frac{1}{3\sqrt{2}-4},-\frac{1}{3\sqrt{2}-4},-\frac{1}{3\sqrt{2}-4})$ e raggio $r_1=|t_1|=\frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{2}-4}$, che quindi ha equazione cartesiana $(x+\frac{1}{3\sqrt{2}-4})^2+(y+\frac{1}{3\sqrt{2}-4})^2+(z+\frac{1}{3\sqrt{2}-4})^2=\frac{3}{34-24\sqrt{2}}$.