Tutorato 3

Giulia Iezzi

03/04/2020

Esercizio 1

Si considerino lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$ e i punti $P_t = (-t, 0, t-1)$, $Q = (2, -2, -1)$.

a) determinare un'equazione cartesiana per il piano H passante per Q e contenente P_t per ogni valore di t;

b) determinare la distanza tra l'origine e il piano H.

Svolgimento:

a) Per prima cosa, osserviamo che le coordinate di P_t si possono riscrivere: $P_t = (0, 0, -1) + (-t, 0, t)$, che è l'equazione parametrica della retta passante per $(0, 0, -1)$ che ha vettore direttore $(-1, 0, 1)$; questo significa che al variare di t si ottengono tutti i punti su questa retta. Inoltre, il punto Q non giace su questa retta per alcun valore di t, cioè Q non è allineato con nessuna coppia di punti sulla retta; allora il piano H passante per Q e per P_t per ogni valore di t è univocamente individuato, e per trovarlo basta assegnare al parametro t due valori distinti t_1 e t_2 e imporre il passaggio del generico piano $ax + by + cz + d = 0$ per Q, P_{t_1} e P_{t_2}.
Ad esempio, se prendiamo $t_1 = 0$ e $t_2 = 1$ abbiamo $P_{t_1} = (0, 0, -1)$ e $P_{t_2} = (-1, 0, 0)$.

$$\begin{cases} 2a - 2b - c + d = 0 \\ -c + d = 0 \\ -a + d = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = d \\ c = d \\ b = d \end{cases}$$

Possiamo prendere $a = b = c = d = 1$, e quindi $H : x + y + z + 1 = 0$.

b) Applichiamo la formula della distanza punto–piano a $O = (0, 0, 0)$ e $H : x + y + z + 1 = 0$: $d(O, H) = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Esercizio 2

Si considerino lo spazio Euclideo $\mathbb{R}^3$, con coordinate (x, y, z), e le rette:

$$r : \begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

a) stabilire se le due rette hanno un punto in comune;

b) scrivere equazioni parametriche per la retta r;

c) determinare l'equazione cartesiana del piano passante per l'origine ortogonale a r;

d) determinare la distanza tra l'origine e la retta r.

Svolgimento:

a) per determinare l'eventuale punto in comune tra le due rette bisogna considerare la loro intersezione, cioè mettere a sistema le equazioni cartesiane di r con quelle di s; se questo sistema è risolubile r e s si incontrano in un punto, se è impossibile non si incontrano e se è indeterminato allora in realtà le due rette coincidono.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x + z = 0 \\ x + y - z = 0 \\ y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 1 \\ x = 3 \\ z = 4 \\ z = -6 \end{cases}$$

Il sistema non è risolubile, quindi le due rette non hanno un punto in comune.

b) per trovare l'equazione parametrica della retta r assegniamo ad una variabile un valore parametrico:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \frac{t}{2} - \frac{1}{2} \\ z = -2t \end{cases} \implies r = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -2 \end{pmatrix}\}.$$

c) Si vede facilmente che il piano ortogonale a r (cioè i cui vettori direttori sono entrambi ortogonali al vettore direttore di r) ha equazione cartesiana:

$$\pi : x + \frac{1}{2}y - 2z + d = 0.$$

Imponendo il passaggio per l'origine si trova $d = 0$, quindi il piano cercato è:

$$\pi : x + \frac{1}{2}y - 2z = 0.$$

d) La distanza tra l'origine O e la retta r è la lunghezza del segmento $\overline{OP}$, dove P è l'intersezione tra r e il piano che passa per O ed è ortogonale ad r, cioè il piano π trovato nel punto precedente.

$$P = \begin{cases} x + \frac{1}{2}y - 2z = 0 \\ x - 2y = 1 \\ 2x + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2} \\ z = -2x \\ x + \frac{1}{2}(\frac{x}{2} - \frac{1}{2}) - 2(-2x) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{21}{4}x - \frac{1}{4} = 0 \\ \text{———} \\ \text{———} \end{cases}$$

$$P = \begin{cases} x = \frac{1}{21} \\ y = -\frac{10}{21} \\ z = -\frac{2}{21} \end{cases}$$

$$\implies d(O, r) = d(O, P) = \sqrt{\left(\tfrac{1}{21}\right)^2 + \left(-\tfrac{10}{21}\right)^2 + \left(-\tfrac{2}{21}\right)^2} = \tfrac{\sqrt{105}}{21}$$

Esercizio 3

Si consideri lo spazio affine $\mathbb{R}^3$ con riferimento cartesiano standard $(O; x, y, z)$.

a) Dati i punti $A = (0,1,0)$, $B = (1,1,1)$, $C = (2,0,1)$, verificare che non sono allineati;

b) scrivere l'equazione cartesiana del piano passante per A, B e C;

c) determinare l'equazione cartesiana del piano π passante per il punto $P = (2,-1,3)$, parallelo alla retta $r = \begin{cases} x - 3z = 1 \\ y + z = 3 \end{cases}$ e perpendicolare al piano $\alpha : 2x - 3y + 4z = 1$.

d) Scrivere infine l'equazione cartesiana di una qualsiasi retta che sia sghemba alla retta r.

Svolgimento:

a) La matrice che ha per colonne le coordinate dei tre punti A, B e C ha determinante diverso da zero. Questo vuol dire che i tre vettori dello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ congiungenti O con i tre punti dati formano una base per $\mathbb{R}^3$, perciò i tre punti dello spazio cartesiano non possono essere allineati.

b) L'equazione cartesiana del piano per i tre punti si ottiene imponendo che sia nullo il determinante della matrice che ha come righe $(x,y,z)-(0,1,0)$, $(1,1,1)-(0,1,0)$ e $(2,0,1)-(0,1,0)$, cioè:

$$\det \begin{pmatrix} x & y-1 & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$
$$\Longrightarrow x + y - z = 1$$

c) Il piano π richiesto deve contenere nella sua giacitura un vettore direttore di r e un vettore normale al piano α. Pertanto, detto $\vec{v}$ un vettore direttore di r e $\vec{n}$ un vettore normale a α, un vettore normale a π è il vettore

$$\vec{m} = \vec{v} \wedge \vec{n}.$$

Scelti opportunamente $\vec{v}$ e $\vec{n}$ si trova $\vec{m} = \begin{pmatrix} 1 \\ 10 \\ 7 \end{pmatrix}$.

L'equazione cartesiana di π è quindi della forma:

$$x + 10y + 7z + k = 0.$$

Imponendo il passaggio per P troviamo l'equazione:

$$\pi : x + 10y + 7z - 13 = 0.$$

d) Per determinare una qualsiasi retta sghemba a r, prendiamo un qualsiasi piano parallelo ad esempio a $y + z = 3$, sia questo ad esempio

$$y + z = 2.$$

Poi consideriamo un piano non parallelo a $x - 3z = 1$ che non contenga r, ad esempio $z = 1$ (mettendo a sistema le equazioni cartesiane di r con $z = 1$si trova un unico punto di intersezione, quindi $z = 1$ non contiene r). In definitiva, la retta data da $\begin{cases} y + z = 2 \\ z = 1 \end{cases}$ è sicuramente una retta sghemba a r, dato che non è parallela a r ed è contenuta in un piano parallelo ad uno dei due che determinano r.