# Tutorato 2

Giulia Iezzi

27/03/2020

## Esercizio 1

Trovare l'equazione della circonferenza che passa per i punti $A = (1, 2)$, $B = (0, 0)$ e $D = (3, 3)$. Qual è il coefficiente angolare della retta che è tangente alla circonferenza nell'origine?

*Svolgimento:* Per prima cosa individuiamo il centro $(x, y)$ della circonferenza imponendo che sia equidistante dai tre punti assegnati; questo significa imporre la condizione:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = x^2 + y^2 = (x-3)^2 + (y-3)^2$$

Svolgendo i quadrati di binomio e cancellando i termini quadratici rimane il sistema lineare:

$$-2x - 4y + 5 = 0 = -6x - 6y + 18 \qquad \Longrightarrow \begin{cases} x = -2y + \frac{5}{2} \\ y = -x + 3 \end{cases} \quad \Longrightarrow C = (x, y) = (\frac{7}{2}, -\frac{1}{2})$$

Per trovare il raggio della circonferenza basta calcolare la distanza tra il centro e uno qualunque dei punti assegnati (scegliamo $(0, 0)$ per comodità):

$$|\overline{BC}| = \sqrt{\left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{25}{2}}$$

e quindi l'equazione della circonferenza è: $(x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2}$.

La retta $r$ tangente alla circonferenza nell'origine deve ovviamente passare per l'origine, e quindi ha equazione $r : y = mx$, dove $m$ è il coefficiente angolare. L'intersezione tra $r$ e la circonferenza è il luogo dei punti che verifica il sistema: $\begin{cases} y = mx \\ (x - \frac{7}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases}$.
Quello che dobbiamo imporre è che l'intersezione sia costituita da due punti coincidenti, quindi sostituiamo la prima equazione nella seconda, ottenendo un'equazione di secondo grado in $x$, e imponiamo che il suo discriminante sia nullo:

$$\begin{cases} y = mx \\ x^2 + \frac{49}{4} - 7x + (mx + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{2} \end{cases} \qquad \begin{cases} y = mx \\ x^2 + \frac{49}{4} - 7x + m^2x^2 + \frac{1}{4} + mx - \frac{25}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = mx \\ (1 + m^2)x^2 + (m - 7)x = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad \Delta = 0 \iff (m-7)^2 = 0 \iff m = 7 \text{ con molteplicità 2} \Longrightarrow r : y = 7x.$$

## Esercizio 2

Si considerino, nel piano euclideo $\mathbb{R}^2$, i vettori $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\vec{w} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}$ e i punti $P = (2, 1)$, $Q = (8, 5)$ e $K = (7, 2)$. Determinare:

a) l'equazione cartesiana della retta $s$ passante per i punti $P$ e $Q$;

b) la distanza del punto $K$ dalla retta $s$;

c) la proiezione $H$ del punto $K$ sulla retta $s$ e verificare che la distanza tra i punti $H$ e $K$ è uguale alla distanza calcolata nel punto precedente;

d) l'equazione parametrica della retta passante per il punto $P$ e ortogonale al vettore $\vec{v}$;

e) equazioni parametriche e cartesiane della retta $t$ passante per il punto $P$ e parallela al vettore $\vec{w}$.

*Svolgimento:*

a) Sappiamo che l'equazione cartesiana della retta nel piano è della forma $ax + by + c = 0$; per trovare $a$, $b$ e $c$ imponiamo il passaggio della retta per i punti $P$ e $Q$:

$$\begin{cases} 2a + b + c = 0 \\ 8a + 5b + c = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a - c \\ c = -8a - 5(-2a - c) \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -2a - c \\ c = 2a + 5c \end{cases} \qquad \begin{cases} b = -\frac{3}{2}a \\ c = -\frac{1}{2}a \end{cases}$$

Possiamo scegliere il valore di $a$, il parametro libero, per trovare i corrispondenti $b$ e $c$ (l'equazione cartesiana della retta è unica a meno di fattori di proporzionalità); ad esempio, prendiamo $a = -2$, $b = 3$ e $c = 1$ e abbiamo $s : -2x + 3y + 1 = 0$.

b) Applichiamo la formula per trovare la distanza tra il punto $K$ e la retta $s$:

$$d(K, s) = \frac{|-14 + 6 + 1|}{\sqrt{4 + 9}} = \frac{7}{\sqrt{13}} = \frac{7}{13}\sqrt{13}$$

c) La proiezione di $K$ su $s$ è l'intersezione tra $s$ e la retta passante per $K$ che è ortogonale a $s$; questa retta ha equazioni parametriche $\begin{cases} x = 7 - 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$. Sostituiamo queste nell'equazione cartesiana di $s$ per trovare il valore di $t$ corrispondente all'intersezione cercata, cioè il punto $H$:
$-2(7 - 2t) + 3(2 + 3t) + 1 = 0 \implies -14 + 4t + 6 + 9t + 1 = 0 \implies 13t = -7 \implies t = -\frac{7}{13}$.
$\implies H = (7 + 2\frac{7}{13}, 2 - 3\frac{7}{13})$.
Ora, la distanza tra $H$ e $K$ è: $|\overline{HK}| = \frac{7}{13}\left|\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}\right| = \frac{7}{13}\sqrt{13}$, che è proprio la distanza trovata nel punto precedente.

d) La retta $r$ passante per $P$ e ortogonale al vettore $\vec{v}$ ha equazione parametrica:

$$r = P + \text{Span}\{\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\}$$

dove il vettore $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ è tale per cui il suo prodotto scalare con $\vec{v}$ è nullo. Imponiamo questa condizione per trovare $a$ e $b$:

$2a+b=0 \iff b=-2a$

quindi possiamo prendere $a=1$ e $b=-2 \implies r = P + \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\}$.

e) Perché $\vec{w}$ e $t$ siano paralleli, $\vec{w}$ deve essere contenuto nella giacitura di $t$, che quindi ha equazione parametrica:

$$t : P + \text{Span}\{\begin{pmatrix} 8 \\ 5 \end{pmatrix}\}$$

Ora troviamo l'equazione cartesiana di $t$:

$$\begin{cases} x = 2+8k \\ y = 1+5k \end{cases} \qquad \begin{cases} k = \frac{1}{8}x - \frac{1}{4} \\ y = 1 + \frac{5}{8}x - \frac{5}{4} \end{cases} \qquad \implies t : -5x+8y+2=0.$$

## Esercizio 3

Sia $P=(3,-2,5)$ un punto di $\mathbb{R}^3$ e siano $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix}$ due vettori geometrici.

a) Trovare un vettore $\vec{k}$ di norma 7 ortogonale ad entrambi i vettori $\vec{u}$ e $\vec{v}$;

b) scrivere le equazioni cartesiane della retta $r$ passante per $P$ e parallela al vettore $\vec{k}$;

c) determinare le coordinate dell'estremo iniziale $I$ del segmento orientato che rappresenta il vettore $\vec{v}$ ed il cui estremo finale è il punto $P$.

*Svolgimento:*

a) Il vettore $\vec{k}$ è ortogonale sia a $\vec{u}$ che a $\vec{v}$ se e solo se $\vec{k}\cdot\vec{u}=0$ e $\vec{k}\cdot\vec{v}=0$; se $\vec{k} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, per trovare $a$, $b$ e $c$ imponiamo l'ortogonalità con $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e che la norma di $\vec{k}$ sia 7:

$$\begin{cases} a-3b=0 \\ 5a-9b-4c=0 \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=3b \\ -4c=-6b \\ \sqrt{a^2+b^2+c^2}=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=3b \\ c=\frac{3}{2}b \\ \sqrt{(3b)^2+b^2+(\frac{3}{2}b)^2}=7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=3b \\ c=\frac{3}{2}b \\ \frac{7}{2}b=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} a=6 \\ c=3 \\ b=2 \end{cases} \implies \vec{k} = \begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

b) Per trovare le equazioni cartesiane della retta $r$ conviene passare per la sua equazione parametrica, che è $r = P + \text{Span}\{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$, e risolvere il sistema:

$$\begin{cases} x=3+6t \\ y=-2+2t \\ z=5+3t \end{cases} \qquad \begin{cases} t=\frac{1}{6}x-\frac{1}{2} \\ t=\frac{1}{2}y-1 \\ z=5+3(\frac{1}{2}y-1) \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{6}x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}y-1 \\ z=\frac{14}{3}+\frac{3}{2}y \end{cases} \implies \begin{cases} \frac{1}{6}x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}=0 \\ z-\frac{3}{2}y-\frac{14}{3}=0 \end{cases}$$

c) Il punto $I = (x, y, z)$ è tale che $\vec{v} = \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ -4 \end{pmatrix} = \overline{IP} = \begin{pmatrix} 3-x \\ -2-y \\ 5-z \end{pmatrix}$, quindi possiamo trovarne le coordinate:

$$\begin{cases} 3 - x = 5 \\ -2 - y = -9 \\ 5 - z = -4 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2 \\ y = 7 \\ z = 9 \end{cases} \implies I = (-2, 7, 9).$$