Tutorato 1

Giulia Iezzi

20/03/2020

Esercizio 1

Nei casi indicati sotto determinare equazioni cartesiane per lo spazio W, trovare i valori del parametro t per i quali il vettore $\vec{v}_t$ appartiene a W e, per tali valori di t, scrivere le coordinate di $\vec{v}_t$ rispetto ad una base di W (indicare la base scelta).

a) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\}, \qquad \vec{v}_t = \begin{pmatrix} 7 \\ t+4 \\ 1 \\ t \end{pmatrix};$

b) $W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\}, \qquad \vec{v}_t = \begin{pmatrix} t-3 \\ 7-t \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix};$

Svolgimento:

Indichiamo un generico vettore di $\mathbb{R}^4$ con $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$.

a) Per prima cosa osserviamo che l'insieme dei generatori di W non è indipendente (il terzo è somma dei primi due), mentre lo diventa se togliamo uno qualunque dei tre vettori, ad esempio il terzo. Per ricavare le equazioni cartesiane di W possiamo considerare:

$$W = \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\}.$$

Quindi risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x = \lambda + 3\mu \\ y = 3\mu \\ z = -\lambda + \mu \\ w = \mu \end{cases} \qquad \begin{cases} \mu = w \\ 3\mu = y \\ \lambda = \mu - z \\ x = w - z + y \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 3w \\ x - y + z - w = 0 \end{cases}$$

Il vettore $\vec{v}_t$ appartiene allo spazio W se e solo se le sue componenti soddisfano le equazioni cartesiane di W, quindi imponiamo questa condizione per trovare - se esiste - il giusto t:

$$\begin{cases} t+4=3t \\ 7-(t+4)+1-t=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -2t=-4 \\ -2t=-4 \end{cases} \qquad \Longrightarrow t=2 \Longrightarrow \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ora scegliamo la base canonica per decomporre $\vec{v}_2$:

$$\vec{v}_2 = 7\,\vec{e}_1 + 6\,\vec{e}_2 + 1\,\vec{e}_3 + 2\,\vec{e}_4.$$

b) Si vede che lo spazio W ha dimensione 3. Dato che W è un sottospazio di $\mathbb{R}^4$, sappiamo che è descritto da una sola equazione cartesiana; per trovarla risolviamo il sistema:

$$\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=\beta+\gamma \\ z=-\alpha+\beta \\ w=-\gamma \end{cases} \qquad \begin{cases} \gamma=-w \\ \beta=y+w \\ \alpha=y+w-z \\ x=y+w-z-y-w \end{cases} \qquad \Longrightarrow x+z=0$$

Con lo stesso ragionamento di prima troviamo il valore di t per cui $\vec{v}_t \in W$:
$\vec{v}_t \in W \iff t-3-3=0$, cioè $t=6$.

Per decomporre $\vec{v}_6 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \\ -3 \end{pmatrix}$ possiamo usare la base $B = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3, \vec{b}_4\}$, dove:

$$\vec{b}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{b}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

e quindi:

$$\vec{v}_6 = 1\,\vec{b}_1 + \frac{1}{3}\,\vec{b}_2 - 1\,\vec{b}_3 - 1\,\vec{b}_4.$$

Esercizio 2

Dati i punti $P_1 = (8,10,6)$, $P_2 = (-1,2,-9)$ e $P_3 = (5,7,0)$ dello spazio affine $\mathbb{R}^3$, determinare:

a) la lunghezza del segmento $\overline{P_2P_3}$ e il suo punto medio;

b) la dimensione del più piccolo sottospazio affine S contenente P_1,P_2 e P_3 e scrivere le equazioni parametriche e cartesiane di S.

Svolgimento:

a) Per trovare la lunghezza di $\overline{P_2P_3}$ usiamo la formula nota:

$$|\overline{P_2P_3}| = \sqrt{(5-(-1))^2 + (7-2)^2 + (0-(-9))^2} = \sqrt{142}$$

e per le coordinate del punto medio M facciamo la media delle corrispondenti coordinate di P_2 e P_3:

$$M = (\frac{-1+5}{2}, \frac{2+7}{2}, \frac{-9+0}{2}) = (2, \frac{9}{2}, -\frac{9}{2})$$

b) Il più piccolo sottospazio affine contenente P_1, P_2 e P_3 è $S = V + P_1$, dove $V = \text{Span}\{\overrightarrow{P_1P_2}, \overrightarrow{P_1P_3}\}$. Dato che la dimensione di S è per definizione la dimensione di V, vediamo se $\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente indipendenti:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = \begin{pmatrix} -1-8 \\ 2-10 \\ -9-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix} \qquad \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{pmatrix} 5-8 \\ 7-10 \\ 0-6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{P_1P_2}$ e $\overrightarrow{P_1P_3}$ sono linearmente indipendenti (non sono multipli l'uno dell'altro), quindi $\dim S = \dim V = 2$.

Avendo trovato la giacitura V possiamo scrivere subito l'equazione parametrica di S:

$$S = \begin{pmatrix} 8 \\ 10 \\ 6 \end{pmatrix} + \text{Span}\{\begin{pmatrix} 9 \\ 8 \\ 15 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\}$$

e da questa ricaviamo l'equazione cartesiana di V:

$$\begin{cases} x = 8 + 9t + 3k \\ y = 10 + 8t + 3k \\ z = 6 + 15t + 6k \end{cases} \quad \begin{cases} 3k = x - 9t - 8 \\ y = 10 + 8t + x - 9t - 8 \\ z = 6 + 15t + 6k \end{cases} \quad \begin{cases} 6k = 2x - 18t - 16 \\ t = x - y + 2 \\ z = 6 + 15x - 15y + 30 + 2x - 18t - 16 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow z = 20 + 17x - 15y - 18x + 18y - 36 \Longrightarrow z = -16 - x + 3y$$

$$\Longrightarrow S: \quad x - 3y + z + 16 = 0$$

Esercizio 3

Data la retta r dello spazio affine $\mathbb{R}^3$: $r = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ y - 2x = 0 \end{cases}$ e il piano $\pi : x + y + kz = 1$, dipendente dal parametro k, determinare:

a) i valori di k per cui π e r sono paralleli;

b) le equazioni parametriche e cartesiane del piano τ che passa per i punti $A = (-1, 1, 0)$, $B = (0, 2, 3)$ e $C = (4, 0, 7)$. Assegnato a k il valore trovato nel punto precedente, π e τ sono paralleli?

Svolgimento:

a) Sappiamo che due spazi affini sono paralleli se la giacitura di uno è contenuta nella giacitura dell'altro, quindi in questo caso dobbiamo controllare per quali valori di k la giacitura di r è contenuta in quella di π. Per prima cosa passiamo dalle equazioni cartesiane di r all'equazione parametrica, per individuare il suo vettore direttore:

$$\begin{cases} x = t \\ t + y - z = 0 \\ y - 2t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 3t \end{cases} \Longrightarrow r = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span}\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}\}$$

Anche per trovare la giacitura di π dobbiamo passare alla sua equazione parametrica, e per farlo assegniamo a due variabili due valori parametrici:

$$\begin{cases} y = \lambda \\ z = \mu \\ x = -\lambda - k\mu + 1 \end{cases} \implies \pi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ora, dire che la giacitura di r è contenuta in quella di π è equivalente a dire che $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, il vettore direttore di r, si può esprimere come combinazione lineare dei vettori $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} -k \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; imponiamo questa condizione per trovare k:

$$\begin{cases} 1 = -\alpha - \beta k \\ 2 = \alpha \\ 3 = \beta \end{cases} \implies 3 = -3k \implies k = -1.$$

Osserviamo che si poteva arrivare allo stesso risultato imponendo $\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -k & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0$, cioè imponendo che i tre vettori fossero dipendenti.

b) Determiniamo per prima cosa l'equazione parametrica di τ; per la giacitura basta considerare due vettori che hanno come estremità due dei punti A, B, C, ad esempio $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ e $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$. L'equazione parametrica di τ quindi è:

$$\tau = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$$

e da questa ricaviamo la sua equazione cartesiana:

$$\begin{cases} x = -1 + \lambda + 4\mu \\ y = 1 + \lambda - 2\mu \\ z = 3\lambda + 4\mu \end{cases} \implies 3z - 5x - 4y - 1 = 0$$

Il piano τ è parallelo al piano π se e solo se entrambi i vettori della sua giacitura si possono esprimere come combinazione lineare dei vettori della giacitura di π. In altre parole, i due piani sono paralleli se e solo se i sistemi $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$ e $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ sono entrambi sistemi dipendenti.

Si vede che $\det \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \neq 0$, cioè il primo sistema è un sistema indipendente di vettori, e quindi π e τ non sono paralleli.