

Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

II Esonero I Modulo - a.a. 2019/2020

Geometria - 13 CFU - a.a. 2019/20

Docente Corso: F. Flamini

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. [10 punti] Sia dato il numero complesso $z = \frac{1}{3+3i} \in \mathbb{C}$.

- (i) Scrivere il numero complesso z nella forma algebrica $z = a + ib$, ove $i^2 = -1$ e' l'unita' immaginaria ed $a, b \in \mathbb{Q}$.
- (ii) Determinare la rappresentazione trigonometrica (o polare) e la rappresentazione esponenziale di z .
- (iii) Determinare espressione algebrica (cioe' nella forma $c + id$) di z^4 .

Esercizio 2. [10 punti] Si consideri lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, munito di base canonica $e = \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3, \underline{e}_4$ e coordinate rispetto a tale base x_1, x_2, x_3, x_4 . Analogamente, si consideri $\mathbb{R}^3$ spazio vettoriale, munito di base canonica $f = \underline{f}_1, \underline{f}_2, \underline{f}_3$ e coordinate rispetto a tale base y_1, y_2, y_3 . Sia data inoltre l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 \end{pmatrix}.$$

- (i) Stabilire se L e' suriettiva.
- (ii) In caso di risposta negativa al punto (i), determinare una base per $Im(L)$.
- (iii) Stabilire se L e' iniettiva.
- (iv) In caso di risposta negativa al punto (iii), determinare una base per $Ker(L)$.

Esercizio 3. [10 punti] Sia $\mathbb{R}^2$ spazio vettoriale euclideo, munito di prodotto scalare standard $\cdot$ e base canonica e , ortonormale rispetto a $\cdot$. Siano (x, y) le coordinate rispetto alla base e . Si consideri il sottospazio vettoriale $W \subset \mathbb{R}^2$ definito dall'equazione cartesiana

$$W : x - 2y = 0.$$

- (i) Determinare una base ortonormale di W .
- (ii) Estendere la base ortonormale di W determinata al punto (i) ad una base ortonormale f per $\mathbb{R}^2$.
- (iii) Denotato con $\pi_W \in \text{End}(\mathbb{R}^2)$ l'operatore **proiettore ortogonale sul sottospazio** W , determinare la matrice rappresentativa in base f dell'operatore π_W . Stabilire se f e' una base diagonalizzante per π_W . Determinare il polinomio caratteristico $P_{\pi_W}(x) \in \mathbb{R}[x]$ dell'operatore π_W .

Svolgimento Esercizio 1

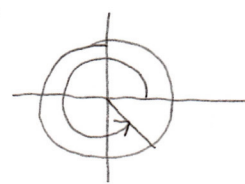
(1)

$$(i) Z = \frac{1}{3+3i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+i} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1-i}{1-i^2} =$$
$$= \frac{1}{3} \frac{1-i}{1-(-1)} = \frac{1-i}{6} = \boxed{\frac{1}{6} - \frac{i}{6}}$$

$$(ii) \|Z\| = \frac{1}{36} + \frac{1}{36} = \frac{2}{36} \Rightarrow |Z| = \frac{\sqrt{2}}{6} = \rho$$

$$\Rightarrow \frac{1}{6} - \frac{i}{6} = \frac{\sqrt{2}}{6} \cos \theta + i \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \theta \text{ che fornisce}$$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{6} \cos \theta = \frac{1}{6} \\ \frac{\sqrt{2}}{6} \sin \theta = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$



$$\Downarrow$$
$$\theta = \cancel{\frac{\pi}{4}} \pi = -\frac{\pi}{4}$$

$\Downarrow$

$$\boxed{Z = \frac{\sqrt{2}}{6} \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) = \frac{\sqrt{2}}{6} e^{i \frac{7\pi}{4}}}$$

(iii) Per le formule di De Moivre

$$Z^4 = \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^4 (\cos 7\pi + i \sin 7\pi) = \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^4 (\cos \pi + i \sin \pi) =$$
$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{6} \right)^4 (-1 + i0) = -\frac{4}{6^4} = -\frac{2^2}{3^4 \cdot 2^4} = -\frac{1}{3^4 \cdot 2^2} = -\frac{1}{81 \cdot 4}$$

$\Rightarrow$

$$\boxed{Z^4 = -\frac{1}{324}}$$

Svolgimento esercizio 2

(2)

(i) Per definizione di L , la matrice rappresentativa nelle basi $e, f \bar{e}$:

$$M_{f, e}^{(L)} = \begin{pmatrix} -5 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \\ -3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Notiamo che $R_1 = R_3 - 2R_2$ ma $\det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \neq 0 \Rightarrow$

$$\text{rg}(M_{f, e}^{(L)}) = \text{rg}(L) = 2 \Rightarrow \dim(\text{Im } L) = 2$$

$\Rightarrow L$ non è suriettiva.

(ii) Una base di $\text{Im}(L)$ è data da due qualsiasi colonne indipendenti di $M_{f, e}^{(L)}$, ad esempio

$$\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} = 1\underline{f}_1 + 2\underline{f}_2 + 5\underline{f}_3 \quad \text{e} \quad \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \underline{f}_1 + \underline{f}_3$$

(iii) Per le teoreme di "Nullità più Rango",

$$\dim(\ker L) = 4 - \dim(\text{Im } L) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow L \text{ non è iniettiva}$$

(iv) Poiché la I riga di $M_{f, e}^{(L)}$ è dipendente dalla II e dalla III, equazioni cartesiane per $\ker(L)$ sono date da:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ -3x_1 + 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = t \in \mathbb{R} \\ x_2 = s \in \mathbb{R} \end{matrix} \quad \text{e risolvere}$$

$$\begin{cases} 2x_3 = -t + s \\ 5x_3 + x_4 = 3t - 2s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x_3 = -\frac{t}{2} + \frac{s}{2} \\ x_4 = 3t - 2s + \frac{5}{2}t - \frac{5}{2}s \\ \quad = \frac{11}{2}t - \frac{9}{2}s \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{x} = \begin{pmatrix} t \\ s \\ -\frac{t}{2} + \frac{s}{2} \\ \frac{11}{2}t - \frac{9}{2}s \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{11}{2} \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{1}{2} \\ -\frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

Una base per $\ker(L)$ è quindi, ad esempio,

$$\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_1 - \underline{e}_3 + 11\underline{e}_4, \quad \underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix} = 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - 9\underline{e}_4$$

(i) Il sottospazio

$$W: x - 2y = 0$$

è generato da $\underline{w} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ equivalente mente dal vettore

$$\underline{f}_1 = \frac{\underline{w}}{\|\underline{w}\|} = \frac{1}{\sqrt{4+1}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5}\sqrt{5} \\ \frac{1}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

(ii) Il vettore $\underline{f}_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{5}}{5} \\ -\frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}$ è ortogonale ad $\underline{f}_1$

Pertanto $\underline{f}_1, \underline{f}_2$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^2$

(iii) In base $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ il proiettore ortogonale su W ha matrice rappresentativa

$$M_{\underline{f}, \underline{f}}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pertanto $\underline{f}$ è una base diagonalizzante per π_W e il polinomio caratteristico di π_W è:

$$P_{\pi_W}(x) = x(x-1) = x^2 - x$$