

Università degli Studi di Roma "Tor Vergata" - STM
Geometria - a.a. 2019/20 - Docente: Prof. F. Flamini
I Esonero I Modulo

SVOLGIMENTO

Esercizio 1. [10 punti] Sia $t \in \mathbb{R}$ un parametro. Siano dati la matrice parametrica

$$A_t := \begin{pmatrix} -1 & t & t-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix} \in M_{3 \times 3}(\mathbb{R}),$$

il vettore parametrico

$$\underline{b}_t := \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \in M_{3 \times 1}(\mathbb{R})$$

ed il vettore di indeterminate

$$\underline{x} := \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

- (i) Determinare per quali valori del parametro $t \in \mathbb{R}$, il sistema lineare $A_t \underline{x} = \underline{b}_t$ risulta compatibile.
- (ii) Per ciascun fissato valore $t \in \mathbb{R}$, tra quelli trovati al punto (i), stabilire da quanti parametri liberi dipendono le soluzioni del sistema lineare $A_t \underline{x} = \underline{b}_t$ e descrivere esplicitamente queste soluzioni.

Esercizio 2. [10 punti] Sia $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ lo spazio vettoriale dei polinomi a coefficienti reali, nell'indeterminata x e di grado al più 3. Si consideri il sottoinsieme

$$W := \{p(x) \in V \mid p(2) = 0\} \subset V,$$

i.e. di quei polinomi in V che si annullano per $x = 2$.

- (i) Verificare che W è un sottospazio di V e calcolare $\dim(W)$.
- (ii) Dimostrare che il sistema di vettori $\mathcal{B} := \{(x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\}$ è una base per W .
- (iii) Sia dato $q(x) = x^2 - x - 2 \in V$. Dopo aver determinato le coordinate di $q(x)$ rispetto alla base canonica di V , verificare che $q(x) \in W$ ed in seguito determinare le coordinate di $q(x)$ come vettore del sottospazio W rispetto alla base $\mathcal{B}$ di questo sottospazio.

Esercizio 3. [10 punti] Sia $V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a + b + 3c = 0 \right\}.$$

- (i) Verificare che W è un sottospazio di V .
- (ii) Determinare una base di W .
- (iii) Detto $U = \text{Triangsup}_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ il sottospazio di V delle matrici triangolari superiori, determinare $\dim(U + W)$ e stabilire se la somma $U + W$ è somma diretta.
- (iv) Determinare equazioni parametriche e cartesiane del sottospazio $W \cap U$ di V , equazioni determinate rispetto alla base canonica di V .

Esercizio 1

(1)

$$i) A_t = \begin{pmatrix} -1 & t & t-1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}, \quad \underline{b}_t = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Calcolo determinante rispetto prima colonna con il metodo di Laplace

$$\det(A_t) = -1 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & t \end{pmatrix} = -2t \neq 0 \Leftrightarrow t \neq 0$$

* Se $t \neq 0$, A_t è invertibile e, per ogni vettore $\underline{b}$, $A_t \cdot \underline{x} = \underline{b}$ è sempre compatibile con unica soluzione

$$* \text{ Se } t = 0 \Rightarrow A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mentre } \underline{b}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Il sistema $A_0 \cdot \underline{x} = \underline{b}_0$ è manifestamente incompatibile visto che contiene le due equazioni:

$$2x_2 = 1 \quad \text{e} \quad 1x_2 = 0$$

Pertanto $A_t \cdot \underline{x} = \underline{b}_t$ compatibile $\Leftrightarrow t \neq 0$

ii) Per $t \neq 0$, le soluzioni di ciascun $A_t \cdot \underline{x} = \underline{b}_t$ sono univocamente determinate

Usando Cramer

$$x_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} t & t & t-1 \\ 1 & 2 & 0 \\ t & 1 & t \end{pmatrix}}{-2t} = \frac{(2t^2 + 0 + t-1) - [2t(t-1) + t^2]}{-2t} = \frac{2t^2 + t - 1 - 2t^2 + 2t - t^2}{-2t} = \frac{t^2 - 3t + 1}{2t}$$

Sarrus

$$x_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & t & t-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & t & t \end{pmatrix}}{-2t} = \frac{-1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & t \end{pmatrix}}{-2t} = \frac{-t}{-2t} = \frac{1}{2}$$

Laplace

$$x_3 = \frac{\det \begin{pmatrix} -1 & t & t \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & t \end{pmatrix}}{-2t} = \frac{-1 \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & t \end{pmatrix}}{-2t} = \frac{-2t + 1}{-2t} = \frac{2t-1}{2t}$$

Laplace

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{t^2 - 3t + 1}{2t} \\ 1/2 \\ \frac{2t-1}{2t} \end{pmatrix} \quad x.$$

a) $W = \{ p \in \mathbb{R}[x]_{\leq 3} \mid p(2) = 0 \} \Rightarrow$

$p(x) = (x-2) \cdot (ax^2 + bx + c) \Rightarrow \dim W = 3$

b) $B = \{(x-2), (x-2)^2, (x-2)^3\} \subset V$

B è un sistema libero di vettori di W infatti

$\alpha_1(x-2) + \alpha_2(x^2-2x+4) + \alpha_3(x^3-6x^2+12x-8) = 0 \Leftrightarrow$

$\alpha_3 x^3 + (\alpha_2 - 6\alpha_3)x^2 + (\alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3)x + (-2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 8\alpha_3) = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 6\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 - 4\alpha_2 + 8\alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$$

Poiché $\dim W = 3$, B è una base per W

c) $Q(x) \in W$ perché $Q(2) = 0$

Ora $Q(x) = x^2 - x - 2$, cioè $Q(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ coord. di

$Q(x)$ in V rispetto alla base canonica $\{1, x, x^2, x^3\}$ di V

Rispetto alla base B di W

$\alpha_1(x-2) + \alpha_2(x-2)^2 + \alpha_3(x-2)^3 = x^2 - x - 2 \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 - 6\alpha_3 = 1 \\ \alpha_1 - 2\alpha_2 + 12\alpha_3 = -1 \\ -2\alpha_1 + 4\alpha_2 - 8\alpha_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = 0 \\ \alpha_2 = 1 \\ \alpha_1 = -1 + 4 \cdot (1) = -1 + 4 = 3 \\ -2 \cdot (3) + 4 \cdot (1) - 8 \cdot (0) = -2 \text{ (ok)} \end{cases}$$

$\Rightarrow Q(x) = 1(x-2) + 3(x-2)^2 + 0(x-2)^3$ cioè le coord. di $Q(x) \in W$ rispetto a B sono $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Esercizio 3

(3)

$$V = M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \text{ e } W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid a+b+3c=0 \right\}$$

$$(i) \text{ se } A, A' \in W \Rightarrow A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad A' = \begin{pmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{pmatrix} \text{ con } \begin{cases} a+b+3c=0 \\ a'+b'+3c'=0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \alpha A + \beta A' = \begin{pmatrix} \alpha a + \beta a' & \alpha b + \beta b' \\ \alpha c + \beta c' & \alpha d + \beta d' \end{pmatrix}$$

Notiamo che

$$(\alpha a + \beta a') + (\alpha b + \beta b') + 3(\alpha c + \beta c') = \alpha(a+b+3c) + \beta(a'+b'+3c') \\ = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha A + \beta A' \in W \Rightarrow W \text{ è sottospazio}$$

$$(ii) \quad A \in W \Leftrightarrow A = \begin{pmatrix} a & -a-3c \\ c & d \end{pmatrix} =$$

$$= a \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dim W = 3 \text{ ed una base è } \{A_1 := \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_2 := \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, A_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\}$$

(iii) se $U = \text{Triang Sup}_{2 \times 2} \subset V$, allora

$$W \cap U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \mid \begin{cases} c=0 \\ a+b+3c=0 \end{cases} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & -a \\ 0 & d \end{pmatrix} \mid a, d \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim(W \cap U) = 2$$

Poiché $\dim U = 3$, per la formula di Grassmann

$$\dim(W+U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U) =$$

$$= 3 + 3 - 2 = 4$$

$$\Rightarrow W+U = V$$

La somma non è diretta, in quanto $\dim(W \cap U) = 2 > 0$.

$$(iv) \quad W \cap U = \text{Span} \left\{ A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\} = \left\{ A_1 = \Delta_{11} - \Delta_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right.$$

$$\left. A_3 = \Delta_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Quindi, la generica matrice in $W \cap U$ è

$$A = \alpha \Delta_{11} - \alpha \Delta_{12} + 0 \Delta_{21} + \beta \Delta_{22} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = 0 \\ x_4 = \beta \end{cases}$$

sono eq. parametriche per $W \cap U$ rispetto alla base canonica di $M_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \Rightarrow$ equaz. cartesiane $\begin{cases} x_1 + x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}$ infatti $\text{codim}_V(W \cap U) = 2$