SVOLGIMENTO II ESONERO

3 GIUGNO 2020

GEOMETRIA II MODULO STM

A.A. 2019/2020

PROF. F. FLAMINI

Esercizio 1 In $\mathbb{R}^2$ piano cartesiano, con coordinate cartesiane affini (x,y), siano date le rette: ①

$r: x+2y=3$, $\ell: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$, $s: 2x-y=0$

(1) Considerando $\mathbb{R}^2$ come la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare le coordinate omogenee dei punti di intersezione che le chiusure proiettive delle rette date hanno a due a due fra loro.

(2) Scrivere equazione cartesiana affine della retta traccia, nella carta affine A_2, individuata dalla retta chiusura proiettiva, in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, della retta s in A_0.

(3) Determinare il punto improprio in A_2 della retta traccia trovata al punto (2).

---

(1) La retta $r: x+2y=3$ ha vettore direttore $\underline{v}_r = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ed è quindi parallela (ma non coincidente) alla retta $\ell: \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ visto che $\underline{v}_\ell = 2\underline{v}_r$

ma $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \notin r$

Pertanto, denotate con $\overline{r}$ e $\overline{\ell}$ le chiusure proiettive delle due precedenti rette, $\boxed{\overline{r} \cap \overline{\ell} = [0,2,-1]}$

Per quanto riguarda $s: 2x-y=0$, essa è perpendicolare sia a r che a ℓ

$s \cap r: \begin{cases} x+2y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2(2x)=3 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x=3 \\ y=2x \end{cases}$

$\Rightarrow s \cap r = \left(\frac{3}{5}, \frac{6}{5}\right)$ ma allora $\boxed{\overline{s} \cap \overline{r} = [5,3,6]}$

Infine $s \cap \ell: \begin{cases} 2x-y=0 \\ x=1+4t \\ y=-2t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} 2(1+4t)-(-2t)=0 \\ 2+6t+2t=0 \end{matrix}$

$2+8t=0 \Rightarrow t = -\frac{2}{8} = -\frac{1}{4}$ quindi

$$s \cap \ell: \begin{cases} x = 1 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = 1 - 1 = 0 \\ y = -2 \cdot \left(-\frac{1}{4}\right) = +\frac{2}{4} = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow s \cap \ell = \left(0, \frac{1}{2}\right)$$

Ma allora $\boxed{\overline{s} \cap \overline{\ell} = [2, 0, 1]}$

(2) s in A_0 ha equazione $2x - y = 0$

$\overline{s}$ in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ha equazione omogenea

$$2X_1 - X_2 = 0$$

Nella carta affine A_2 poniamo

$$z = \frac{X_0}{X_2} \qquad w = \frac{X_1}{X_2}$$

e la retta traccia è $\overline{s} \cap A_2$: $2w - 1 = 0$

cioè $\boxed{w = \frac{1}{2}}$

(3) Il punto improprio cercato è dato dal sist omogeneo

$$\begin{cases} 2X_1 - X_2 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2X_1 = 0 \\ X_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{[1, 0, 0]}$$

Esercizio 2

Si consideri $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ e la proiettività F data dalla classe di proporzionalità della matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(1) Stabilire che A_0 e $\{x_0 = 0\}$ sono stabili per F

(2) Detta f la trasformazione affine indotta da F in A_0 stabilire se è una isometria

(3) Determinare i punti fissi in A_0 di f

(4) Data la circonferenza $\mathcal{C}: x^2 + y^2 = 3$ in A_0, determinare la trasformata di $\mathcal{C}$ mediante f scrivendo esplicita equazione cartesiana

---

(1) Dalla forma data, M fissa come sottoinsiemi sia A_0 che $\{x_0 = 0\}$

(2) $$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ è ortogonale speciale $\Rightarrow f$ è una rotazione di angolo $\begin{cases} \cos\theta = \frac{1}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$ quindi è <u>isometria</u>

(3) $f\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = x \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y + 2 = y\end{cases} \iff$ (4)

$$\begin{cases}-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y + 1 = 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y + 2 = 0\end{cases} \iff \begin{cases}-\frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = -1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2\end{cases} \iff$$

$$\begin{cases}\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = -2\end{cases} \iff \begin{cases}x + \sqrt{3}y = 2 \\ \sqrt{3}x - y = -4\end{cases}$$

Cramer

$$x = \frac{\begin{pmatrix}2 & \sqrt{3}\\ -4 & -1\end{pmatrix}}{\det\begin{pmatrix}1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{3} & -1\end{pmatrix}} = \frac{-2+4\sqrt{3}}{-1-3} = \frac{-2(1-2\sqrt{3})}{-4} = \frac{1-2\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{\begin{pmatrix}1 & 2\\ \sqrt{3} & -4\end{pmatrix}}{-4} = \frac{-4-2\sqrt{3}}{-4} = \frac{-2(2+\sqrt{3})}{-4} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

È rotazione di angolo $\theta = \frac{\pi}{3}$ attorno a

$$\boxed{P = \left(\frac{1-2\sqrt{3}}{2}, \frac{2+\sqrt{3}}{2}\right)}$$

(4) Visto che f è isometria e $\mathcal{G}$ è circonferenza di centro $O=(0,0)$ e raggio $r=\sqrt{3} \Rightarrow f(\mathcal{G})$ è circonferenza di stesso raggio $r=\sqrt{3}$ e centro

$f(O) = A\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \Rightarrow$

$$\boxed{f(\mathcal{G}) : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 3}$$

Esercizio 3

Sia $\mathbb{H}$ il corpo dei quaternioni e si consideri

$$\underline{q} = \frac{\sqrt{2}}{4} i - \frac{\sqrt{2}}{4} j + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(1) Stabilire se $\underline{q}$ è unitario

(2) Determinare $\underline{q}^{-1}$

(3) Denotato con $\Omega_{\underline{q}}$ l'operatore di coniugio su $\mathbb{H}$, consideriamo la rotazione che $\Omega_{\underline{q}}$ induce sullo spazio $\mathbb{R}^3$ identificato con $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$. Sapendo che la rotazione è attorno ad una retta vettoriale $\mathrm{Span}(\underline{u})$ dove $\underline{u}$ versore t.c. $\underline{u} \cdot \underline{e}_1 > 0$, determinare asse di rotazione e angolo.

---

(1) $\underline{q} = \frac{\sqrt{2}}{4} i - \frac{\sqrt{2}}{4} j + \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow$

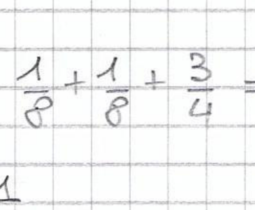
$$q_x^2 + q_y^2 + q_z^2 + q_w^2 = \frac{2}{16} + \frac{2}{16} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{2}{8} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = \frac{4}{4} = 1 \Rightarrow \|\underline{q}\| = 1$$

(2) $\boxed{\underline{q}^{-1} = \underline{q}^* = -\frac{\sqrt{2}}{4} i + \frac{\sqrt{2}}{4} j + \frac{\sqrt{3}}{2}}$

(3) Poiché $\underline{q} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{4}, -\frac{\sqrt{2}}{4}, 0 \right), \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \left(\underline{u}_{\underline{q}} \sin\omega, \cos\omega \right)$

$$\Rightarrow \underline{u}_{\underline{q}} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



$\omega = \frac{\pi}{6}$ oppure $\omega = \frac{11}{6}\pi$

Se fosse $\omega = \frac{11}{6}\pi \Rightarrow \sin\omega = -\frac{1}{2}$

Ma allora

$$\underline{u}_{\underline{q}} \sin\omega = \begin{pmatrix} u_x \sin\omega \\ u_y \sin\omega \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} u_x \\ -\frac{1}{2} u_y \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\| $$

$$\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -u_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -u_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u_x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_y = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{\underline{q}} = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \quad e \quad \underline{u}_{\underline{q}} \cdot \underline{e}_1 = -\frac{\sqrt{2}}{2} < 0 \ \#$$

Quindi $\omega = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \sin\omega = \frac{1}{2}$

$$\underline{u}_{\underline{q}} \cdot \sin\omega = \begin{pmatrix} u_x \cdot \frac{1}{2} \\ u_y \cdot \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{4} \\ -\frac{\sqrt{2}}{4} \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} u_x = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_y = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ u_z = 0 \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \underline{u}_{\underline{q}} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Omega_{\underline{q}} \text{ è rotazione attorno a span}(\underline{u}_{\underline{q}}) \\ \text{di angolo } 2\omega = 2 \cdot \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} \end{array}}$$

$$\underline{u}_{\underline{q}} : \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2} t \\ y = -\frac{\sqrt{2}}{2} t \\ z = 0 \end{cases}$$