

Esercizio 1

In $\mathbb{R}^2$ abbiamo

$$C = (1, 1), \quad P = (3, 4), \quad r = 2 \quad \text{e} \quad \underline{v} = (1, -1)$$

Domanda 1 È vero che $P \in \mathcal{G}_{C,2}$ = circonferenza centro C e raggio 2?

$$d(C, P) = \|P - C\| = \sqrt{(3-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \quad (\text{SI})$$

Domanda 2 La retta ℓ , per $Q = (3, 4)$ e con vettore direttore $\underline{v} = (1, -1)$ è secante, tangente o esterna a $\mathcal{G}_{C,2}$?

Poiché $\underline{v} \cdot \underline{v} = \underline{v} \cdot (1, -1) = 0 \Rightarrow \underline{m} = (1, 1)$ vettore normale a ℓ

$\Rightarrow \ell: x + y + c = 0$, devo trovare quale è c .

Passaggio per Q : $3 + 4 + c = 0 \Rightarrow c = -7$

quindi $\ell: x + y - 7 = 0$

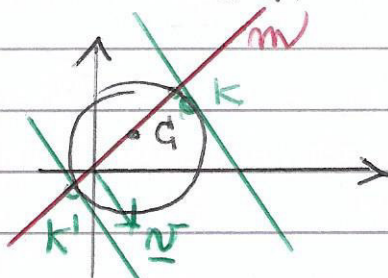
One

$$d(C, \ell) = \frac{|1 + 1 - 7|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} > 2 = r$$

Quindi ℓ è retta ESTERNA a $\mathcal{G}_{C,2}$

Domanda 3

Se $\underline{v} = (1, -1) \Rightarrow \underline{m} = (1, 1)$ è vettore normale a $\underline{v}$



m = Retta per C e con vettore direttore $\underline{m}$

$$m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 + t \end{cases}$$

Siccome $\mathcal{G}_{C,2}: (x-1)^2 + (y-1)^2 = 4$, considero

$$m \cap \mathcal{G}_{C,2}: (1+t-1)^2 + (1+t-1)^2 = 4 \Rightarrow 2t^2 = 4 \Rightarrow t^2 = 2$$

$t = \pm\sqrt{2}$ quindi $K = (1+\sqrt{2}, 1+\sqrt{2})$

$K' = (1-\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$

Esercizio 2

$\mathbb{R}^2$ euclideo, $\cdot$ = prodotto scalare standard, e = base canonica

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Domanda 1

Quale tra le 2 è un operatore di rotazione?

B non è ortogonale, invece A è ortogonale
con $\det(A) = +1 \Rightarrow$ A è rotazione attorno a

Domanda 5 Poiché A deve essere della
forma

$$A = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \underline{\theta = \frac{\pi}{2}}$$

Domanda 6 Solo B è diagonalizzabile

Domanda 7 A è matrice di rotazione
di angolo $\theta = \frac{\pi}{2} \neq k\pi \Rightarrow$ non esistono direz.
privilegiate

Invece B è simmetrico quindi diagonalizzabile
per il teorema spettrale degli operatori auto-
aggiunti

Domanda 8 Notiamo che $\text{Tr}(B) = 5$ e
 $\det(B) = 5$

$$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 5 \quad \text{e} \quad \lambda_1 \lambda_2 = 5 \quad \text{dove } \lambda_1, \lambda_2 \text{ autovalori di } B$$

$$\Rightarrow \lambda_2 = 5 - \lambda_1 \Rightarrow \lambda_1(5 - \lambda_1) = 5 \Rightarrow$$

$$5\lambda_1 - \lambda_1^2 = 5 \Rightarrow \lambda_1^2 - 5\lambda_1 + 5 = 0$$

$$\lambda_1 = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 20}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{2} \Rightarrow D = \begin{pmatrix} \frac{5+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{5-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con coord. cartesiane (x, y, z) sono date le due rette

$$r: \begin{cases} x - y = 2 \\ y + z = 3 \end{cases}$$

$$l: \begin{cases} x = 5 + t \\ y = 1 + t \\ z = 7 + 2t \end{cases}$$

Domanda 9

Stabilire che r e l sono sghembe

r giace sul piano $x - y = z$ e ha vettore direttore
 $\underline{n}_r = (1, 1, -1)$

Notiamo che l giace sul ^{piano} $x - y = 4$ infatti
 $(5+t) - (1+t) = 4 \quad \forall t \in \mathbb{R}$

Poiché $\pi: x - y = z$ e $\alpha: x - y = 4$ sono 2 piani paralleli e non coincidenti $\Rightarrow l \cap r = \emptyset$

Notiamo che $\underline{n}_l = (1, 1, 2)$ non proporzionale
a $\underline{n}_r = (1, 1, -1)$.

Poiché $l \cap r = \emptyset \Leftrightarrow l$ e r parallele e non coincide oppure l e r sghembe $\Rightarrow$
 l e r sono sghembe

Domanda 10

$$d(l, r) = ?$$

Fascio di piani di asse r :

$$2(x - y - z) + \mu(y + z - 3) = 0 \Rightarrow 2x - 2y - 2z + \mu y + \mu z - 3\mu = 0$$

$$2x + (\mu - 2)y + \mu z - 2\mu = 0$$

Considero l'unico piano del fascio parallelo a l

per essere parallelo a l , $\underline{n}_l$ deve appartenere alla giuntura

$$2x + (\mu - 2)y + \mu z = 0 \quad (\text{equivalentemente } \underline{n}_l \cdot \underline{n}(\lambda, \mu) = 0)$$

$$\text{cioè } 2 \cdot 1 + (\mu - 2) \cdot 1 + 2\mu = 0 \Leftrightarrow \lambda + \mu - \lambda + 2\mu = 0 \Leftrightarrow$$

$$[3\mu = 0] \rightarrow \alpha: x + y - z = 0 \text{ è il piano cercato.}$$

Poichè $P = (5, 1, 4) \in l$ per colore

$d(l, r)$ è sufficiente colore

$$d(P, \alpha) = \frac{|5+4-2|}{\sqrt{1+1}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2}\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$