Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame IV APPELLO - Settembre 2020
Geometria - a.a. 2019/2020
Docente I e II Modulo: F. Flamini

SVOLGIMENTO

]

Esercizio 1. Sia $\mathbb{R}^3$ spazio vettoriale, munito della base canonica e. Siano assegnati i seguenti vettori:

$$\underline{v}_1 = (0, 1, -1),\ \underline{v}_2 = (1, 0, 1),\ \underline{v}_3 = (1, -1, 3),$$

le cui componenti sono espresse rispetto ad e.
(i) Verificare che $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{v}_3$ sono generatori per $\mathbb{R}^3$ e che sono linearmente indipendenti. **[2 punti]**
(ii) Considerato il vettore $\underline{w}$ che, rispetto ad e, ha componenti $\underline{w} = (1, 0, 2)$, calcolare le componenti di $\underline{w}$ rispetto alla base v data dai vettori $\underline{v}_1,\ \underline{v}_2,\ \underline{v}_3$. **[4 punti]**
(iii) Determinare le componenti del vettore $\underline{u} \in \mathbb{R}^3$ rispetto alla base e sapendo che, rispetto alla base v, esso ha componenti $(1, -2, 1)$. **[4 punti]**
Svolgimento. (i) Per verificare che i vettori dati sono linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, basta calcolare il determinanate della matrice del sistema dei tre vettori dati rispetto ad e. Esso viene diverso da 0. Siccome sono tre vettori linearmente indipendenti in $\mathbb{R}^3$, non possono che generare tutto lo spazio vettoriale, i.e. sono una sua base di $\mathbb{R}^3$. .
(ii) Ponendo

$$\underline{w} = (1, 0, 2) = c_1(0, 1, -1) + c_2(1, 0, 1) + c_3(1, -1, 3)$$

si trova

$$c_1 = 1,\ c_2 = 0,\ c_3 = 1;$$

queste sono le componenti di $\underline{w}$ rispetto alla base v.
(iii) $\underline{u} = 1\underline{v}_1 - 2\underline{v}_2 + \underline{v}_3 = (-1, 0, 0)$, che sono le sue componenti rispetto alla base canonica e.

Esercizio 2. Nello spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^3, \cdot)$, dotato della base canonica e e del prodotto scalare standard $\cdot$, sia dato il sottospazio vettoriale di equazioni cartesiane

$$U \quad \begin{cases} X_1 - X_2 & = & 0 \\ X_2 + X_3 & = & 0 \end{cases}$$

(i) Determinare una base ortonormale di U. **[3 punti]**
(ii) Estendere la base determinata al punto (i) ad una base ortonormale f per $\mathbb{R}^3$. **[3 punti]**
(iii) Se $\underline{u} = 2\underline{e}_1 + 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3$, determinare le componenti del vettore $\underline{u}$ rispetto alla base f determinata al punto (ii). **[4 punti]**

Svolgimento. (i) Notiamo che $U = Span\left\{ \underline{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Pertanto $\underline{f}_1 := \frac{\underline{u}_1}{||\underline{u}_1||} =$ $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$.

(ii) Due vettori indipendenti e non contenuti nel sottospazio U sono ad esempio $\underline{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{u}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Utilizzando il procedimento di ortogonalizzazione di Gram-Schmidt abbiamo

$$\underline{w}_2 = \underline{u}_2,\ \underline{w}_3 = \underline{u}_3 - \frac{\langle \underline{w}_2, \underline{u}_3 \rangle}{||\underline{w}_2||^2} \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(-1)}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

La base ortogonale per U e' quindi $\underline{w}_2, \underline{w}_3$. Basta quindi ortonormalizzare questi vettori, ottenendo $\underline{f}_2 := \frac{\underline{w}_2}{||\underline{w}_2||} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\underline{f}_3 := \frac{\underline{w}_3}{||\underline{w}_3||} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix}$

(iii) Essendo e ed f entrambi basi ortonormali, la matrice M cambiamento di base e' una matrice ortogonale, i.e. $M^{-1} = {}^tM$. Per determinare pertanto le componenti del vettore $\underline{u}$ in base f basta quindi calcolare il prodotto

$${}^tM \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4\sqrt{3}}{3} \\ \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \end{pmatrix} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \underline{f}_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \underline{f}_2 + \frac{\sqrt{6}}{3} \underline{f}_3.$$

Esercizio 3. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con riferimento cartesiano ortogonale standard e con coordinate cartesiane (x, y, z), sia $\pi \subset \mathbb{R}^3$ il piano di equazione cartesiana:

$$\pi : \quad x + y + 2z = 1.$$

(i) Scrivere le formule di riflessione rispetto al piano π. **[3 punti]**

(ii) Determinare equazioni parametriche e cartesiane della retta $m \subset \mathbb{R}^3$, ottenuta per riflessione della retta $l : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases}$ rispetto al piano π. **[3 punti]**

(iii) Determinare le equazioni cartesiane della sfera Σ ottenuta dalla riflessione rispetto a π della sfera S di centro O e raggio 2. **[4 punti]**

Svolgimento. (i) Sia $p = (a, b, c)$ il punto generico di $\mathbb{R}^3$. Un vettore normale al piano π e' il vettore $\underline{n} = (1, 1, 2)$. Pertanto la retta r, passante per p e perpendicolare a π, ha equazione parametrica vettoriale

$$\underline{x} = \underline{p} + t\underline{n},$$

e quindi equazioni parametriche scalari

$$x = a + t, \quad y = b + t, \quad z = c + 2t.$$

Se imponiamo l'intersezione di r con π, si ottiene il valore

$$t_0 = \frac{1 - a - b - 2c}{6}.$$

Quindi, se $S_\pi(p)$ denota il simmetrico di p rispetto a π, esso si ottiene come punto sulla retta r, corrispondente al valore del parametro $2t_0$, cioe'

$$S_\pi(p) = (a,b,c) + \frac{1-a-b-2c}{3}\ (1,1,2).$$

In definitiva, le formule di simmetria rispetto a π sono

$$S_\pi((a,b,c)) = \left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}a + \frac{2}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b - \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}\right).$$

(ii) Prendiamo due punti su l, ad esempio $R = (1,0,1)$ e $Q = (0,-1,-1)$. Dalle formule di simmetria precedenti, si ha che

$$S_\pi(R) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) \quad S_\pi(Q) = (\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, \frac{5}{3}).$$

Percio', un vettore direttore di m e' dato da

$$S_\pi(Q) - S_\pi(R) = (1,1,2).$$

Allora, l'equazione parametrica vettoriale di m e' data da $\underline{x} = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}) + t(1,1,2)$ e quindi le equazioni parametriche scalari sono

$$x = \frac{1}{3} + t, \ \ y = -\frac{2}{3} + t, \ \ z = -\frac{1}{3} + 2t.$$

Queste determinano le equazioni cartesiane di m che sono, ad esempio

$$m: \quad x - y - 1 = 0 = 2x - 3z - 1 = 0.$$

(iii) Poiche' S_π e' un'isometria, per determinare l'equazione cartesiana della sfera Σ e' sufficiente quindi determinare il punto ottenuto per riflessione rispetto a π del centro di S. Si ottiene $S_\pi(O) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, pertanto l'equazione cartesiana di Σ e' semplicemente

$$(x - \frac{1}{3})^2 + (y - \frac{1}{3})^2 + (z - \frac{2}{3})^2 = 4.$$

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano con origine O e coordinate (x,y). Siano date le rette

$$\ell : x - y = 3$$

e

$$r : x = 1 + 2t, \ \ y = 2 + 2t, \ \ t \in \mathbb{R}.$$

(i) Identificato il piano cartesiano con la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, stabilire se le rette ℓ e r hanno lo stesso punto improprio; **[2 punti]**
(ii) Date coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare equazioni cartesiane omogenee delle rette $\underline{\ell}$ e $\underline{r}$ individuate dai completamenti proiettivi in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ delle rette affini ℓ e r in $\mathbb{R}^2$. **[2 punti]**
(iii) Data $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiettivita' determinata dalla classe di proporzionalita' della matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se F ha la retta $x_0 = 0$ come retta fissa (o stabile). Determinare gli eventuali punti fissi di F su $x_0 = 0$. **[3 punti]**
(iv) Stabilire se la retta $x_2 = 0$ e' retta di punti fissi per F. In caso di risposta negativa, determinare gli eventuali punti fissi sulla retta $x_2 = 0$. **[3 punti]**

Svolgimento. (i) Le rette ℓ e r sono parallele, avendo la medesima giacitura $x - y = 0$. Pertanto il loro punto improprio comune e' il punto di coordinate omogenee $[0, 1, 1]$.
(ii) $\underline{\ell}$ ha equazione omogenea $3x_0 - x_1 + x_2 = 0$. La retta r di $\mathbb{R}^2$ e' parallela a ℓ e passante per $(1, 2)$, quindi ha equazione (affine) in $\mathbb{R}^2$ $x - y + 1 = 0$. Pertanto, l'equazione omogena di $\underline{r}$ e' $x_0 + x_1 - x_2 = 0$.
(iii) Notare che $F([0, \alpha, \beta]) = [0, \alpha + 2\beta, \beta]$, percio' $x_0 = 0$ viene fissata da F come retta. Pertanto e' una retta stabile per F, ma non e' retta di punti fissi. Un punto fisso sulla retta e' determinato dalle condizioni

$$\alpha + 2\beta = t\beta, \ \beta = t\beta, \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Questo fornisce il sistema omogeneo

$$(*) \quad (1 - t)\beta = 0, \ \ \alpha + (2 - t)beta = 0.$$

Se, dalla prima equazione in $(*)$, fosse $\beta = 0$ allora dalla seconda equazione di $(*)$ si avrebbe anche $\alpha = 0$ che e' impossibile in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Pertanto la prima equazione $(*)$ impone che $t = 1$. Ma allora la seconda equazione di $(*)$ diventa $\alpha + \beta = 0$, che fornisce dunque $\alpha = -\beta$. Quindi l'unico punto fisso per F su $x_0 = 0$ e' il punto $[0, 1, -1]$.
(iv) Notiamo invece che $F([\alpha, \beta, 0]) = [\alpha, \beta, 0]$, cioe' la retta $x_2 = 0$ e' fissata punto per punto da F e quindi ogni punto di questa retta e' punto fisso per F.