Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame III APPELLO - Settembre 2020
Geometria - a.a. 2019/2020
Docente I e II Modulo: F. Flamini

SVOLGIMENTO

]

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^4$, dotato della base canonica e siano dati i due sottospazi:

$$U : \begin{cases} X_1 - X_2 + X_3 &= 0 \\ X_1 + X_4 &= 0 \end{cases}$$

e

$$W = Span \left\{ \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \underline{w}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \underline{w}_3 = \begin{pmatrix} 10 \\ 0 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}.$$

(i) Determinare $\dim(U)$, $\dim(W)$ e basi dei due sottospazi. **[3 punti]**
(ii) Determinare equazioni parametriche di U ed equazioni parametriche e cartesiane di W. **[3 punti]**
(iii) Stabilire se vale l'eguaglianza $\mathbb{R}^4 = U \oplus W$, cioe' se $\mathbb{R}^4$ e' somma diretta dei due sottospazi dati. In caso di risposta negativa, determinare dimensione ed una base di $U + W$ e stabilire se $U + W = U \oplus W$. **[4 punti]**

Svolgimento. (i) Notiamo che $\underline{w}_3 = 4\underline{w}_1 + 3\underline{w}_2$, mentre i primi due vettori che generano W non sono proporzionali. Pertanto $\dim(W) = 2$ ed una base per W e' proprio $w := \underline{w}_1, \underline{w}_2$.
Risolvendo ora il sistema lineare dato dalle equazioni cartesiane che definiscono U si ha che la soluzione generale del sistema e'

$$\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = t\underline{b}_1 + s\underline{b}_2, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

(ii) Dal punto precedente, equazioni parametriche di U sono:

$$X_1 = t, X_2 = s, X_3 = -t + s, X_4 = -t, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Analogamente, equazioni parametriche di W sono:

$$X_1 = a + 2b, X_2 = 0, X_3 = -2b, X_4 = a - 2b, \quad a, b \in \mathbb{R}$$

e quindi equazioni cartesiane di W sono

$$X_1 + 2X_3 - X_4 = 0 = X_2.$$

(ii) Per determinare $U \cap W$ si mettono a sistema le equazioni cartesiane di U e di W e si ottiene

$$U \cap W = Span \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Dalla formula di Grassmann,

$$\dim(U + W) = 2 + 2 - 1 = 3.$$

Quindi non solo $\mathbb{R}^4$ non e' somma diretta di U con W, ma anche il sottospazio somma $U + W$ non e' somma diretta, dato che $U \cap W \neq \{\underline{0}\}$. Una base per $U + W$ e' data dai vettori $\underline{w}_1, \underline{u}_1, \underline{u}_2$.

Esercizio 2. Si consideri l'operatore lineare $F \in End(\mathbb{R}^3)$ definito sui vettori della base canonica come

$$F(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \; F(\underline{e}_2) = -3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \; F(\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico di F. **[3 punti]**
(ii) Stabilire se F e' diagonalizzabile. In caso di risposta affermativa, scrivere la forma diagonale di F in un'opportuna base diagonalizzante. **[3 punti]**
(iii) Stabilire se $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ e' autovettore di F e determinare l'insieme $F^{-1}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ delle controimmagini di $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$. **[4 punti]**
Svolgimento. (i) La matrice che rappresenta F in base canonica e'

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 2 & 4 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di un operatore F e' invariante per classi di simipitudine, pertanto

$$P_F(T) = P_A(T) = (T - 2)(1 - T^2).$$

(ii) Da quanto osservato al punto (ii), il polinomio caratteristico ha come soluzioni i tre autovalori semplici $2, 1, -1$. Pertanto ciascun autovalore ha molteplicita' algebrica e geometria uguale ad uno e l'operatore F e' sicuramente diagonalizzabile. In un'opportuna base di autovettori, la sua forma diagonale e' data da

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(iv) Notiamo che $F(\underline{e}_1 - \underline{e}_2) = 2(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$. Pertanto $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ e' autovettore di autovalore 2. Poiche' F e' un automorfismo di $\mathbb{R}^3$ (cioe' e' biiettiva) allora $F^{-1}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ sara' costituito da un solo vettore. Precisamente $F^{-1}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2) = \{\frac{1}{2}\underline{e}_1 - \frac{1}{2}\underline{e}_2\}$.

Esercizio 3. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano standard $RC(O; x, y)$, sia data la retta r di equazione cartesiana

$$r: \; x - y + 3 = 0.$$

(i) Determinare le formule di riflessione rispetto a r. **[3 punti]**

(ii) Determinare l'equazione cartesiana della circonferenza $\mathcal{C}$ ottenuta per riflessione rispetto a r della circonferenza di centro $C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e raggio 2. **[3 punti]**

(iii) Dopo aver verificato che $Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathcal{C}$, calcolare l'equazione cartesiana della retta tangente alla circonferenza $\mathcal{C}$ nel punto Q. **[4 punti]**

Svolgimento. (i) Sia $P = (a, b)$ il punto generico di $\mathbb{R}^2$. La retta perpendicolare a r passante per P ha equazioni parametriche

$$x = a + t, \ y = b - t.$$

L'intersezione con r determina

$$t = -\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b - \frac{3}{2}.$$

Pertanto le formule di riflessione sono

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(ii) Poiche' una riflessione rispetto ad una retta e' un'isometria, e' sufficiente conoscere le coordinate del riflesso di C, visto che il raggio rimarra' invariato. Pertanto, il nuovo centro sara' $C' = f(C) = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$, l'equazione cartesiana della riflessa $\mathcal{C}$ e'

$$(x + 2)^2 + (y - 5)^2 = 4.$$

(ii) Un vettore normale a $\mathcal{C}$ in Q e' dato dal vettore $Q - C' = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$. In altre parole, un'equazione cartesiana per la retta tangente ℓ e' data da

$$-2(x - 0) + 0(y - 5) = 0$$

che fornisce $x = 0$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ lo spazio dei quaternioni e siano $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ le tre unita' immaginarie in $(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Siano dati i due quaternioni non nulli

$$\underline{a} = \underline{i} + \underline{j} \in \mathbb{H} \quad \text{e} \quad \underline{b} = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\underline{i} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\underline{j} \in \mathbb{H}.$$

(i) Determinare il quaternione prodotto $\underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b}$;
(ii) Determinare il quaternione unitario $\underline{q}$ associato a $\underline{c}$;
(iii) Identificando lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il sottospazio $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ degli immaginari puri di $\mathbb{H}$, con le usuali identificazioni tra $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ ed i vettori ordinati della base canonica e di $\mathbb{R}^3$, descrivere l'asse e l'angolo della rotazione lineare corrispondente alla coniugazione mediante $\underline{q}$, i.e. per ogni $\underline{p} \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\mathbb{H})$,

$$\Omega_{\underline{q}}(\underline{p}) = \underline{q} \cdot \underline{p} \cdot \underline{q}^* = R_{\theta, \underline{u}}(\underline{p}),$$

ove l'asse vettoriale di rotazione $\mathrm{Span}\{\underline{u}\}$ e l'angolo θ sono da determinare opportunamente.

Svolgimento. (i) Ricordando le relazioni che sussistono in $(\mathbb{H}, +, \cdot)$, si ha

$$\underline{c} = \underline{a} \cdot \underline{b} = \sqrt{3} + \underline{k}.$$

(ii) Si ha
$$\underline{q} = \frac{\underline{c}}{\sqrt{||\underline{c}||}} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\,\underline{k}.$$
(iii) Ricordando che i quaternioni unitari sono tutti e soli della forma
$$\underline{q} = (\underline{u}_{\underline{q}} \sin\omega,\ \cos\omega),$$
notiamo che $\underline{u}_{\underline{q}} = \underline{e}_3$ e
$$\sin\omega = \frac{1}{2}\ \ \&\ \ \cos\omega = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \omega = \frac{\pi}{6}.$$
Ricordando che il coniugio $\Omega_{\underline{q}}$ e' associato alla rotazione di asse $\underline{u}_{\underline{q}}$ e angolo 2ω, vuol dire che la rotazione associata al quaternione $\underline{q}$ e' quella attorno all'asse $\mathrm{Span}\{\underline{e}_3\}$ e di angolo $\theta := \frac{\pi}{3}$.