Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame - Luglio 2020
Geometria - a.a. 2019/2020
Docente I e II Modulo: F. Flamini

SVOLGIMENTO

]

Esercizio 1. Sia $V = M(2,2;\mathbb{R})$ lo spazio vettoriale delle matrici quadrate di ordine 2 ad elementi reali. Si consideri il sottoinsieme

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in V \ \mid \ 3a + b + c = 0 \right\}.$$

(i) Verificare che W e' un sottospazio di V.
(ii) Determinare la dimensione di W.
(iii) Detto $U = Sym(2,2;\mathbb{R})$ il sottospazio di V delle matrici simmetriche, stabilire $\dim(U + W)$ e $\dim(U \cap W)$.

Svolgimento. (i) Poiche l'equazione che definisce W e' lineare, W e' banalmente chiuso rispetto alla somma e rispetto al prodotto per uno scalare. Pertanto W e' sottospazio.
(ii) Poiche' $c = -b - 3a$, $\dim(W) = 3$. Infatti una sua base e' data dalle matrici

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(iii) Notiamo che ad esempio la prima matrice della base di W non e' simmetrica; pertanto essa non puo' appartenere ad U. Visto che U ha dimensione 3, con base

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

allora $\dim(U + W) > \dim(U) = 3$. Poiche' $U + W \subseteq V$ e $\dim(V) = 4$, necessariamente deve valere

$$U + W = V.$$

Dalla Formula di Grassmann, $\dim(U \cap W) = 3 + 3 - 4 = 2$.

Esercizio 2. Sia $(\mathbb{R}^3, \cdot)$ spazio vettoriale euclideo, munito del prodotto scalare standard e della base canonica e. Sia $W \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio definito dalle equazioni parametriche

$$W : \begin{cases} X_1 & = & s \\ X_2 & = & s \\ X_3 & = & t \end{cases}, \ s, t \in \mathbb{R}.$$

(i) Verificare che il vettore $\underline{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ non appartiene a W.
(ii) Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su W.
(iii) Determinare il vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su $W^{\perp}$, il complemento ortogonale di W.

Svolgimento. (i) E' ovvio che $\underline{v}$ non giace in W, dato che le sue coordinate rispetto ad e non soddisfano le equazioni parametriche di W.

(ii) Una base per W e' data dai vettori $\underline{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\underline{b}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Facilmente si vede che tali vettori formano una base ortogonale per W. Le proiezioni ortogonali di $\underline{v}$ su tali vettori sono

$$\pi_{\underline{b}_1}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \pi_{\underline{b}_2}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto $\pi_W(\underline{v}) = \pi_{\underline{b}_1}(\underline{v}) + \pi_{\underline{b}_2}(\underline{v}) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(ii) La proiezione ortogonale cercata e' $\underline{v} - \pi_W(\underline{v}) = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}$ che in effetti e' proporzionale al vettore normale a W.

Esercizio 3. Nello spazio cartesiano $\mathbb{R}^3$, con origine O e coordinate (x, y, z), si considerino i punti di coordinate, rispettivamente,

$$P = (2, 2, 1), \ Q = (0, 0, -1), \ R = (3, 2, 0),$$

e la retta r, di equazioni cartesiane

$$x + y + z - 1 = 0 = x + 2y - z - 3.$$

(i) Determinare un'equazione cartesiana del piano π contenente r e passante per P.
(ii) Determinare equazioni parametriche della retta s passante per P e perpendicolare al piano π trovato al punto (i).
(iii) Determinare l'area del triangolo di vertici P, Q e R.
Svolgimento: (i) Il fascio di piani di asse r e'

$$\lambda(x + y + z - 1) + \mu(x + 2y - z - 3) = 0.$$

Imporre il passaggio per P fornisce la condizione $\mu = -2\lambda$; pertanto il piano cercato e' $\pi : x + 3y - 3z = 5$.
(ii) La retta cercata e' la retta per P, con vettore direttore il vettore normale di π; pertanto

$$x = 2 + t, \ y = 2 + 3t, \ z = 1 - 3t, \ \ t \in \mathbb{R}$$

(iii) L'area cercata si puo' calcolare ad esempio utilizzando $\frac{1}{2} || \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} ||$. Ora

$$\overrightarrow{PQ} = (-2, -2, -2), \ \overrightarrow{PR} = (1, 0, -1).$$

Pertanto,

$$\overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} = (2, -4, 2),$$

quindi

$$|| \overrightarrow{PQ} \wedge \overrightarrow{PR} || = \sqrt{24}.$$

In definitiva, l'area cercata e' $\sqrt{6}$.

Esercizio 4. Sia $\mathbb{R}^2$ il piano cartesiano con origine O e coordinate (x, y). Siano date le rette

$$\ell : x - y = 3$$

e

$$r : x = 1 + 2t, \quad y = 2 + 2t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(i) Identificato il piano cartesiano con la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, stabilire se le rette ℓ e r hanno lo stesso punto improprio;
(ii) Date coordinate omogenee $[x_0, x_1, x_2]$ nel piano proiettivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare equazioni cartesiane omogenee delle rette $\overline{\ell}$ e $\overline{r}$ che sono, rispettivamente, i completamenti proiettivi (o chiusure proiettive) in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ delle rette ℓ e r in $\mathbb{R}^2$.
(iii) Data $F : \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ la proiettivita' determinata dalla classe di proporzionalita' di matrici invertibili generata dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

stabilire se F ha la retta $x_0 = 0$ come retta fissa (o stabile). Determinare gli eventuali punti fissi di F su $x_0 = 0$.
(iv) Stabilire se la retta $x_2 = 0$ e' retta di punti fissi per F. In caso di risposta negativa, determinare gli eventuali punti fissi sulla retta $x_2 = 0$

Svolgimento. (i) Le rette ℓ e r sono parallele, avendo la medesima giacitura $x - y = 0$. Pertanto il loro punto improprio comune e' il punto di coordinate omogenee $[0, 1, 1]$.
(ii) $\overline{\ell}$ ha equazione omogenea $3x_0 - x_1 + x_2 = 0$. La retta r di $\mathbb{R}^2$ e' parallela a ℓ e passante per $(1, 2)$, quindi ha equazione (affine) in $\mathbb{R}^2$ $x - y + 1 = 0$. Pertanto, l'equazione omogena di $\overline{r}$ e' $x_0 + x_1 - x_2 = 0$.
(iii) Notare che $F([0, \alpha, \beta]) = [0, \alpha + 2\beta, \beta]$, percio' $x_0 = 0$ viene fissata da F come retta. Pertanto e' una retta stabile per F, ma non e' retta di punti fissi. Un punto fisso sulla retta e' determinato dalle condizioni

$$\alpha + 2\beta = t\beta, \ \beta = t\beta, \quad \text{per qualche } t \in \mathbb{R}.$$

Questo fornisce il sistema omogeneo

$$(*) \quad (1 - t)\beta = 0, \ \ \alpha + (2 - t)beta = 0.$$

Se, dalla prima equazione in $(*)$, fosse $\beta = 0$ allora dalla seconda equazione di $(*)$ si avrebbe anche $\alpha = 0$ che e' impossibile in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$. Pertanto la prima equazione $(*)$ impone che $t = 1$. Ma allora la seconda equazione di $(*)$ diventa $\alpha + \beta = 0$, che fornisce dunque $\alpha = -\beta$. Quindi l'unico punto fisso per F su $x_0 = 0$ e' il punto $[0, 1, -1]$.
(iv) Notiamo invece che $F([\alpha, \beta, 0]) = [\alpha, \beta, 0]$, cioe' la retta $x_2 = 0$ e' fissata punto per punto da F e quindi ogni punto di questa retta e' punto fisso per F.