

Esercizio 1

Sia dato $V = \mathbb{R}[x]_{\leq 3}$ e si consideri il sottoinsieme

$$W = \{ p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0 \}$$

- (i) Verificare che W è un sottospazio vettoriale di V
- (ii) Determinare una base di W e $\dim_{\mathbb{R}} W$
- (iii) Determinare equazioni parametriche di W rispetto alla base canonica di V
- (iv) Determinare equazioni cartesiane ^{di W} rispetto alla base canonica di V

Svolg.

(i) Sia no $p(x)$ e $q(x) \in W$ e $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$

$\lambda p(x) + \mu q(x)$ è un polinomio in V t.c.

$$\lambda p(1) + \mu q(1) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

$$\lambda p(2) + \mu q(2) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0$$

$\Rightarrow W$ è chiuso
rispetto alle
combinazioni
lineari

(ii) Poiché $p(x) \in W \Leftrightarrow$

$$p(x) = (x-1)(x-2)(ax+b)$$

$$\Rightarrow \boxed{\dim_{\mathbb{R}}(W) = 2}$$

Una base di W è

$$\boxed{b_W = \{ (x-1)(x-2), x(x-1)(x-2) \}}$$

infatti

$$(x-1)(x-2)(ax+b) = (x^2-3x+2)(ax+b) =$$

$$\begin{aligned}
 &= ax^3 + bx^2 - 3ax^2 - 3bx + 2ax + 2b \\
 &= a(x^3 - 3x^2 + 2x) + b(x^2 - 3x + 2) = \\
 &= a x (x^2 - 3x + 2) + b (x^2 - 3x + 2)
 \end{aligned}$$

(1b)

(iii) Equazioni parametriche $\leadsto$ 2 parametri liberi

Dai conti precedenti si ha

$$ax^3 + (b-3a)x^2 + (2a-3b)x + 2b$$

Pertanto, rispetto alla base canonica

$\{1, x, x^2, x^3\}$ si ha

$$\begin{cases}
 X_1 = 2b \\
 X_2 = 2a - 3b \\
 X_3 = b - 3a \\
 X_4 = a
 \end{cases}$$

(iv) Eq. cartesiane

$$\# \text{ eq.} = \dim V - \dim W = 4 - 2 = 2$$

Preso

$$P(x) = X_1 \cdot 1 + X_2 \cdot x + X_3 \cdot x^2 + X_4 \cdot x^3$$

$$P(x) \in W \iff \begin{cases} P(1) = 0 = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 \\ P(2) = 0 = X_1 + 2X_2 + 4X_3 + 8X_4 \end{cases}$$

Esercizio 2

2

Sia $\mathbb{R}^3$ lo spazio vettoriale euclideo rispetto a prodotto scalare standard

(i) Determinare una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ t.c.

$$\underline{v}_1 \in \text{Spdm} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\underline{v}_2 \in \text{Spdm} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(ii) Data la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

stabilire se $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3$ sono autovettori di A

(iii) Dedurre la forma diagonale di A

Solgimento (i) $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \\ \sqrt{3}/3 \end{pmatrix}$

Un vettore $\underline{b} \in \text{Spdm} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ è della

forma $\underline{b} = \begin{pmatrix} t+s \\ t+2s \\ t \end{pmatrix}$ e $\underline{b} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow$

$$t+s+t+2s+t=0 \Leftrightarrow 3t+3s=0 \Leftrightarrow$$

$$t=-s \Leftrightarrow \underline{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ -t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

perciò $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$

$$\underline{v}_3 = \underline{v}_1 \wedge \underline{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \underline{e}_1 & \underline{e}_2 & \underline{e}_3 \\ \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 & \sqrt{3}/3 \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix} = \underline{v}_3 \quad (26)$$

(ii) Notare che $\underline{v}_1 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\underline{v}_2 \sim \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$
e $\underline{v}_3 \sim \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4+4 \\ 4+1+1 \\ 4+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 6 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 & 4 \\ 4 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+4+4 \\ -8+1+1 \\ -8+1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix} = -6 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Perciò $P_A(x) = -(x-6)(x+6) \cdot (x)$

e $\underline{v}_1$ autov. relativo a $\lambda = +6$

$\underline{v}_2$ " " " " $\lambda = 0$

$\underline{v}_3$ " " " " $\lambda = -6$

(iii) In base $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \underline{v}_3\}$ la forma diagonale di A è

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Esercizio 3

Nello spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ con coordinate (x, y, z) ha dato il piano

$$\alpha: x + 2y + 3z = 4$$

e, per ogni $t \in \mathbb{R}$ parametro, si consideri il sottospazio affine β_t passante per il punto $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ e con giacitura data da

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \right\}$$

(i) Trovare equazioni parametriche e cartesiane di β_t

(ii) Stabilire se esiste $t \in \mathbb{R}$ per cui β_t risulta parallelo ad α e dire se si tratta di parallelismo proprio o di eventuale coincidenza

(iii) Per gli eventuali valori trovati al punto (ii), Calcolare $d(\alpha, \beta_t)$

(iv) Stabilire per quali valori di $t \in \mathbb{R}$ invece $\alpha \cap \beta_t \neq \emptyset$ e trovare la dimensione del sottospazio affine $\alpha \cap \beta_t$.

$$(i) \quad \begin{cases} x = 1 + 3\lambda + \mu \\ y = 1 + \mu \\ z = 1 - 2\lambda + t\mu \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{eq. parametriche di} \\ \beta_t \end{array}$$

poiché $\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}$ involip. $\forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow \beta_t$ è sempre un piano

$$\det \begin{pmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & t \end{pmatrix} = x + (-3t-1)y + 3z + 3t - 3 = 0$$

eq. cartesiane β_t

(ii) La giacitura di α è

$$\alpha_0: x + 2y + 3z = 0$$

Notiamo che

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in \alpha_0 \quad \text{sempre}$$

mentre $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix} \in \alpha_0 \Leftrightarrow 1 + 2 + 3t = 0 \Leftrightarrow \boxed{t = -1}$

Perciò l'unico valore per cui $\alpha \parallel \beta_t$ è
 $t = -1$

Notiamo che $P = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \notin \alpha$ ma $P \in \beta_t \forall t$
Quindi

$\alpha \parallel \beta_{-1}$ ma non coincidenti

(iii) Per calcolare $d(\alpha, \beta_{-1})$ è sufficiente
calcolare $d(P, \alpha)$ visto che $P \in \beta_{-1}$

$$d(P, \alpha) = \frac{|1 + 2 + 3 - 4|}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{2}{\sqrt{14}}$$

(iv) Per $t \neq -1$ α e β_t non paralleli
 $\Rightarrow$ per forza coincidenti $\Rightarrow \dim(\alpha \cap \beta_t) = 1$
cioè $\alpha \cap \beta_t$ è sempre una retta
affine se $t \neq -1$ (mentre per $t = -1$
 $\alpha \cap \beta_{-1} = \emptyset$)

Esercizio 4

(4)

Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con coordinate (x, y) sia data la trasformazione

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +4 \\ +2 \end{pmatrix}$$

(i) Stabilire se f è un'isometria e determinare i punti fissi di f

(ii) Data la retta $\pi: x + y = 3$ determinare l'equazione cartesiana e parametrica della retta $f(\pi)$

(iii) Identificando $\mathbb{R}^2$ con la carta affine A_0 di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$, determinare il posto omogeneo del punto improprio di $f(\pi)$

(iv) Denotata con $\overline{f(\pi)}$ la chiusura proiettiva in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ di $f(\pi)$, determinare la traccia in A_1 di $\overline{f(\pi)}$

(i) Poiché $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ è matrice ortogonale $\Rightarrow f$ è un'isometria

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +4 \\ +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\begin{aligned} -x + 4 &= x \\ -y + 2 &= y \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2x = +4 \\ 2y = 2 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = +2 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{P = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è unico punto fisso}}$$

(ii) Poiché $P \in \pi$ è sufficiente prendere un punto $Q \in \pi \setminus \{P\}$ ad esempio

$$Q = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ e trovare la retta per } P \text{ e } f(Q)$$

$$f(Q) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+4 \\ -3+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f(\pi) \text{ ha vettore direttore } \overrightarrow{Pf(Q)} = \begin{pmatrix} 4-2 \\ -1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Perciò

$$f(\pi): \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - t \end{cases}$$

$$f(\pi): \text{ det } \begin{pmatrix} x-2 & y-1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$-x+2-y+1=0 \quad -x-y+3=0$$

$$\boxed{x+y-3=0}$$

cioè $f(\pi) = \pi$ in altri termini

π è luogo fisso (ma non gli punti fissi) per f

(iii) Il punto improprio in A_0 di $\pi = f(\pi)$ è

$$\boxed{[0, 1, -1]} \text{ perché il vettore dir. è } \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$(iv) \overline{f(\pi)} = \pi : X_1 + X_2 - 3X_0 = 0$$

Ponendo

$$\xi = \frac{X_0}{X_1}, \quad \eta = \frac{X_2}{X_1} \text{ coordinate affini in } A_1$$

si ha che $\pi \cap A_1 = \overline{f(\pi)} \cap A_1$ ha eq. canonica

$$1 + \eta - 3\xi = 0 \text{ cioè } \boxed{3\xi - \eta - 1 = 0}$$