Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Prova di Esame V APPELLO - Febbraio 2021
Geometria - a.a. 2019/2020
Docente I e II Modulo: F. Flamini

AVVISI IMPORTANTI: (1) GIUSTIFICARE CONCISAMENTE MA CHIARAMENTE passaggi ed affermazioni, motivando le strategie di risoluzione. Non si darà punteggio pieno a passaggi non giustificati.
(2) Consegnare ESCLUSIVAMENTE i seguenti fogli. Non verranno presi in considerazione fogli di brutta–copia nè tantomeno fogli personali aggiuntivi.
(3) Una volta iniziato l'esame scritto, E' SEVERAMENTE VIETATO USCIRE DALL'AULA, salvo consegna definitiva dell'elaborato o ritiro dalla prova scritta.
(4) Non lasciare nessuna parte dell'elaborato scritto a MATITA (per motivi di sicurezza di conformità all'originale consegnato) oppure ad INCHIOSTRO ROSSO (utilizzato dal docente per la correzione).
(5) Non lasciare nessun segno eventualmente identificativo.
(6) I modulo: Esercizi 1 e 2 (1 ora e 20)/ II modulo: Esercizi 3 e 4 (1 ora e 20) / Totale: Esercizi 1, 2, 3 e 4 (2 ore e 40)

Nome e Cognome: ....

Esercizio 1. Nello spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$, munito della base canonica e, siano assegnati i seguenti vettori, espressi in componenti rispetto alla base e:

$$\bar{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_3 = \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \\ 11 \end{pmatrix}, \ \bar{b}_4 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(i) Estrarre da tale sistema di vettori una base b per $\mathbb{R}^3$ che sia positivamente orientata (equivalentemente, equiorientata con e).
(ii) Considerato il vettore $\overline{w} = 2\overline{e}_1 + \overline{e}_2 + 5\overline{e}_3$, calcolare le componenti di $\overline{w}$ rispetto alla base b.
(iii) Determinare le componenti del vettore $\overline{z} \in \mathbb{R}^3$ in base e sapendo che, rispetto alla base b, esso ha componenti $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Esercizio 2. Si consideri l'operatore lineare $F \in End(\mathbb{R}^3)$ definito sui vettori della base canonica come

$$F(\underline{e}_1) = -\underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \ F(\underline{e}_2) = -3\underline{e}_1 + 4\underline{e}_2 + \underline{e}_3, \ F(\underline{e}_3) = 3\underline{e}_1 - 3\underline{e}_2 - \underline{e}_3.$$

(i) Determinare il polinomio caratteristico di F.
(ii) Stabilire se F e' diagonalizzabile. In caso di risposta affermativa, scrivere la forma diagonale di F in un'opportuna base diagonalizzante.
(iii) Stabilire se $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$ e' autovettore di F e determinare l'insieme $F^{-1}(\underline{e}_1 - \underline{e}_2)$ delle controimmagini di $\underline{e}_1 - \underline{e}_2$.

Esercizio 3. Nel piano cartesiano $\mathbb{R}^2$, con riferimento cartesiano ortogonale $RC(O; x_1, x_2)$, e' data la trasformazione

$$F\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

(i) Stabilire se la trasformazione F e' un'isometria oppure un'affinita' di $\mathbb{R}^2$.
(ii) Sia r la retta di equazione cartesiana $2X_1 + X_2 - 3 = 0$. Determinare l'equazione cartesiana di $F(r)$.
(iii) Sia data la circonferenza $\mathcal{C}$ di centro l'origine e raggio unitario. Determinare il luogo geometrico $F(\mathcal{C})$ nel riferimento $RC(O; x_1, x_2)$.

Esercizio 4. Sia $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ lo spazio dei quaternioni e siano $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ le tre unita' immaginarie in $(\mathbb{H}, +, \cdot)$. Siano dati i due quaternioni non nulli

$$\underline{h} = \underline{i} + \underline{j}, \quad \underline{t} = -\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\underline{i} + \left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)\underline{j} \in \mathbb{H}.$$

(i) Determinare il quaternione prodotto $\underline{s} = \underline{t} \cdot \underline{h}$;
(ii) Determinare il quaternione unitario $\underline{q}$ associato a $\underline{s}$;
(iii) Identificando lo spazio vettoriale $\mathbb{R}^3$ con il sottospazio $\mathrm{Im}(\mathbb{H})$ degli immaginari puri di $\mathbb{H}$, con le usuali identificazioni tra $\underline{i}$, $\underline{j}$ e $\underline{k}$ ed i vettori ordinati della base canonica e di $\mathbb{R}^3$, determinare l'asse vettoriale di rotazione $\mathrm{Span}\{\underline{u}\}$ e l'angolo θ della rotazione lineare corrispondente alla coniugazione mediante il quaternione $\underline{q}$:

$$\Omega_{\underline{q}}(\underline{p}) = \underline{q} \cdot \underline{p} \cdot \underline{q}^* = R_{\theta,\underline{u}}(\underline{p}), \quad \forall, \quad \underline{p} \in \mathbb{R}^3 = \mathrm{Im}(\mathbb{H}).$$