Universita' degli Studi di Roma "Tor Vergata"
CCS - STM

Esonero I Modulo - a.a. 2018/2019
Geometria - a.a. 2018/19
Docente I Modulo: F. Flamini

SVOLGIMENTO QUESITI

Esercizio 1. [10 punti] Sia $\mathbb{C}$ il campo dei numeri complessi e sia $\mathbf{z} := 1 + i \in \mathbb{C}$.

(i) Determinare $\mathbf{z}^{-1}$, i.e. l'inverso moltiplicativo di $\mathbf{z}$ in $\mathbb{C}$.

(ii) Rappresentare nel piano di Argand-Gauss i numeri complessi $\mathbf{z}$ e $\mathbf{z}^{-1}$.

(iii) Determinare la rappresentazione polare (equiv. trigonometrica) e quella esponenziale di $\mathbf{z}$.

(iv) Determinare le rappresentazioni polare, esponenziale ed algebrica di $\mathbf{z}^{30}$.

Esercizio 2. [10 punti] Nello spazio vettoriale $(\mathbb{R}^3, e)$, munito di base canonica e, si considerino il vettore $\underline{v} = \underline{e}_1 + 2\underline{e}_2 + 2\underline{e}_3$ e l'endomorfismo $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ definito da

$$L(\underline{e}_1) = L(\underline{e}_2) = L(\underline{e}_3) = \underline{v}.$$

(i) Calcolare il polinomio caratteristico di L e gli autovalori di L, determinando per ogni autovalore la sua molteplicita' algebrica e geometrica.

(ii) Stabilire se L e' un operatore diagonalizzabile ed, in caso affermativo, descrivere una sua forma diagonale D.

(iii) Determinare quale base d di $\mathbb{R}^3$ determina la rappresentazione diagonale D, i.e. tale che $D = M_{d,d}(L)$.

(iv) Calcolare $L^{15}(\underline{v})$, ove (come usualmente) L^{15} denota la composizione operatoria $L \circ \ldots \circ L$ per 15 volte.

Esercizio 3. [10 punti] Si consideri lo spazio vettoriale euclideo $(\mathbb{R}^5, \ \cdot, \ e)$, dove e e' la base canonica e $\cdot$ il prodotto scalare standard. Sia dato il sottospazio vettoriale W, di equazioni cartesiane

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 &= 0 \\ x_4 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_5 &= 0 \end{cases}.$$

(i) Determinare una base b_W ortogonale di W.

(ii) Determinare equazioni cartesiane ed una base ortogonale $b_{W^\perp}$ del sottospazio $W^\perp$, complemento ortogonale di W in $\mathbb{R}^5$.

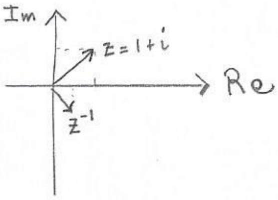
(iii) Considerato l'insieme di vettori $b := b_W \cup b_{W^\perp}$, dedurre che b e' una base ortogonale di $\mathbb{R}^5$ e determinare la matrice cambiamento di base $M_{e,b}$.

(iv) Sia $\pi_W \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^5)$ il proiettore ortogonale sul sottospazio W (i.e. π_W e' l'endomorfismo di $\mathbb{R}^5$ che ad ogni vettore $\underline{v} \in \mathbb{R}^5$ associa il vettore $\pi_W(\underline{v}) \in W \subset \mathbb{R}^5$ vettore proiezione ortogonale di $\underline{v}$ su W). Determinare il rango di π_W ed il polinomio caratteristico $P_{\pi_W}(x)$.

Esercizio 1

(i) $\|z\| = 2$ e $\bar{z} = 1 - i \Rightarrow z^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} i$

(ii)



(iii) $\rho = |z| = \sqrt{2}$; $\quad 1 + i = \sqrt{2}\cos\theta + i\sqrt{2}\sin\theta \Leftrightarrow \begin{cases} \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}, \ \theta = \pi/4$

$$\Rightarrow z = \sqrt{2}\left(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\right) = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

(iv) $z^{30} = (\sqrt{2})^{30}\left[\cos\left(\frac{30}{4}\pi\right) + i\sin\left(\frac{30}{4}\pi\right)\right] = 2^{15}\left[\cos\left(\frac{15}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{15}{2}\pi\right)\right]$

$= 2^{15}\left[\cos\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(7\pi + \frac{\pi}{2}\right)\right] = 2^{15}\left[\cos\left(\frac{3}{2}\pi\right) + i\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)\right]$

$= -i\, 2^{15} = 2^{15} e^{i\frac{3}{2}\pi}$

Esercizio 2

(i) $M_{e,e}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = A$. Poiché $rg(A) = 1 \Rightarrow \dim(\operatorname{Ker} L) = 2 \Rightarrow$

$P_L(x) = x^2(5 - x)$ perché $Tr(L) = 1 + 2 + 2 = 5$

$\mu_a(0) = 2 = \mu_g(0)$ e $\mu_a(5) = \mu_g(5) = 1$

(ii) L è diagonalizzabile ed in una base opportuna $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

(iii) $\operatorname{Ker}(A) = \{x_1 + x_2 + x_3 = 0\} = \operatorname{Span}\left\{\underline{d}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \underline{d}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$V_5(L) = \begin{cases} -4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 = 0 \end{cases} =$

$= \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - \frac{5}{2}x_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 10x_1 - 5x_2 = 0 \end{cases} = \begin{cases} 2x_1 - x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \end{cases}$

$= \operatorname{Span}\left\{\underline{d}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow d = \{d_1, d_2, d_3\}$

(iv) Siccome $\underline{v} = \underline{d}_3 \Rightarrow L(\underline{v}) = 5\underline{v} \Rightarrow L^{15}(\underline{v}) = 5^{15}\underline{v}$

Esercizio 3

(i) $\dim(W) = 5 - 3 = 2$ e $W = \operatorname{Span}\{\underline{w}_1 = \underline{e}_2 - \underline{e}_3, \underline{w}_2 = \underline{e}_2 + \underline{e}_4 - \underline{e}_5\}$

Ortonormalizziamole con Gram-Schmidt

$\underline{b}_1 := \underline{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \underline{b}_2 = \underline{w}_2 - \pi_{\underline{w}_1}(\underline{w}_2) = \underline{w}_2 - \frac{\underline{w}_1 \cdot \underline{w}_2}{\|\underline{w}_1\|^2}\underline{w}_1 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 + 2\underline{e}_4 - 2\underline{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

(ii) $\dim(W^\perp) = 5 - 2 = 3$ e $W^\perp : \begin{cases} x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Una base di $W^\perp$ è per esempio

$\underline{w}_3 = \underline{e}_1$, $\underline{w}_4 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4$, $\underline{w}_5 = \underline{e}_4 + \underline{e}_5$

Notiamo che $\underline{w}_3 \cdot \underline{w}_4 = 0$ e $\underline{w}_3 \cdot \underline{w}_5 = 0$ ma $\underline{w}_4 \cdot \underline{w}_5 = -1$

Dobbiamo ortogonalizzare semplicemente $\underline{w}_5$ rispetto a $\underline{w}_4$
Quindi

$$\underline{b}_3 = \underline{w}_3 = \underline{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \underline{b}_4 = \underline{w}_4 = \underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{b}_5 = \underline{w}_5 - \pi_{\underline{w}_4}(\underline{w}_5) = \underline{w}_5 - \frac{\underline{w}_4 \cdot \underline{w}_5}{\|\underline{w}_4\|^2}\underline{w}_4 = \underline{e}_4 + \underline{e}_5 + \frac{1}{3}(\underline{e}_2 + \underline{e}_3 - \underline{e}_4) =$$

$$= \frac{1}{3}\underline{e}_2 + \frac{1}{3}\underline{e}_3 + \frac{2}{3}\underline{e}_4 + \underline{e}_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\{\underline{b}_3, \underline{b}_4, \underline{b}_5\}$ è base ortogonale di $W^\perp$

(iii) $$M_{e,b} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1/3 \\ 0 & 2 & 0 & -1 & 2/3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(iv) Poiché π_W è suriettiva su $W \Rightarrow rg(\pi_W) = \dim W = 2$
e $$M_{b,b}(\pi_W) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$ e dunque $P_{\pi_W}(x) = (1-x)^2 \cdot (-x)^3$